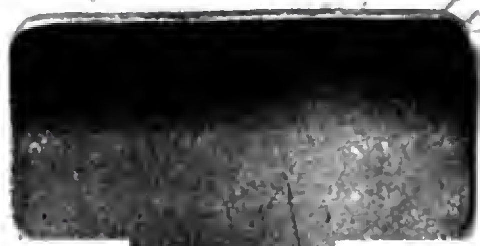
EUCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA NOVO ORDINE, AC METHODO...

Euclides, Ottaviano Cametti





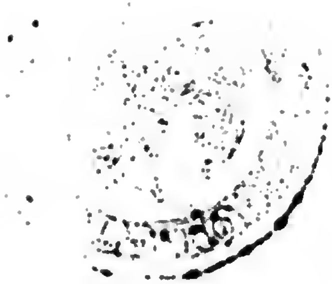


XI

EVCL.

CAM,

EVCLIDIS
ELEMENTA GEOMETRICA.



EUCLIDIS
ELEMENTA GEOMETRICA
NOVO ORDINE, AC METHODO

DEMONSTRATA

A

D. OCTAVIANO CAMETTI

ABBATE VALLUMROSANO

REGIAE LUGDUNENSIS ACADEMIAE SOCIO
ET IN PISANA UNIVERSITATE

PUBLICO MATHESEOS PROFESSORE

Editio Tertia omnium accuratissima.



PISIS ANNO MDCCLXVII.

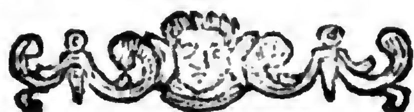
Ex Typographia Augustini Pizzurni
CUM FACULTATE.

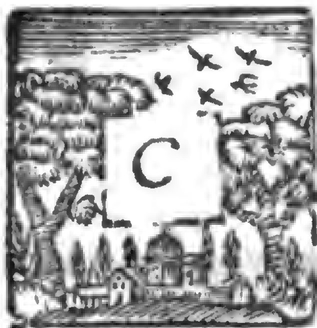
Παιδικὰ (Πλάτων) οἴεται ταῦτα τὰ μαθήματα τὰ προπαρασκευαστικὰ, καὶ καθαρτικὰ ὄντα ψυχῆς εἰς τὸ ἐπιτήδειον αὐτὴν πρὸς φιλοσοφίαν γενέσθαι.

Pueris eorumque aetati censet (Plato) convenire has Mathematicas disciplinas, quae animam praeparant, & defaecant, ut ipsa ad Philosophiam capessendam idonea reddatur.



PRAEFATIO.





UM in Euclideis Elementis crebrò occurrant Propositiones paullò prolixius, atque etiam obscurius demonstratae, quae negotium plerisque ita facessunt, ut vel ad Geometriam animum non convertant, vel si ad disciplinae hujus studium alacri fortasse animo se contulerint, paullò post operis difficultate commoti, fastidioque affecti, a suscepto itinere soleant declinare; jure idcircò optabatur Tractatus aliquis mole parvus, Tyronumque ca-

ptui

ptui accommodatus, qui & longiores Euclidis demonstrationes contraheret, & quod sibi probandum, atque inveniendum proponeret, meridiana luce clarius exhiberet. Vtrumque vero, ni fallor, in hoc Tractatu me arbitror praestitisse. Nam ea in brevibus Corollariis solvuntur passim Problemata, & Theoremata demonstrantur, quae apud Euclidem prolixo indigent ratiocinio; ac praeterea, cum fermè ubique Propositiones ita mutuò sint connexae, ut vel immediate inferatur una ex altera, vel ex consectariis ejus fluat, omnis demonstratio nitida plane erit, Tyronumque captui magis accommodata. Id demum commodi ex hoc tractatu colligi etiam potest, quod nempe in nonnullis Propositionibus principia Geometriae Practicae demonstrentur, in Scholiis verò, quorum non exigua copia est, abstractae Propositiones Euclidis Agrimensurae, Astronomiae, atque Mechanicae applicentur, ut inde sciant Tyrones, se posse earum ope, ac beneficio locorum distantias noscere, inaccessas, altitudines mensurare, atque

agro-

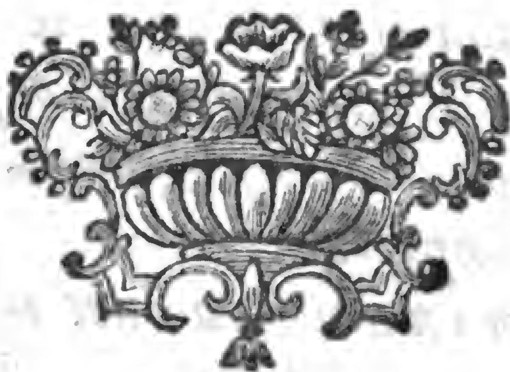
agrorum areas, & solíditates corporum invenire.

Hic autem Tractatus in tres divisus est partes, quarum prima Rectarum intersectiones tum inter se, tum etiam cum Circulo contemplatur, praecipuaque Figurarum planarum symptomata, atque areas comprehendit. In altera vero parte octo proportionum Regulae explicantur, quibus tota fermè Geometrarum Dialectica est innixa, exhibenturque Rectarum, & Figurarum etiam similium proportiones. Ad tertiam partem quod spectat, ea de Planorum occursu tùm inter se, tùm cum Lineis Rectis agit, Corporum symptomata, soliditates, & proportionem mutuam contemplatur.

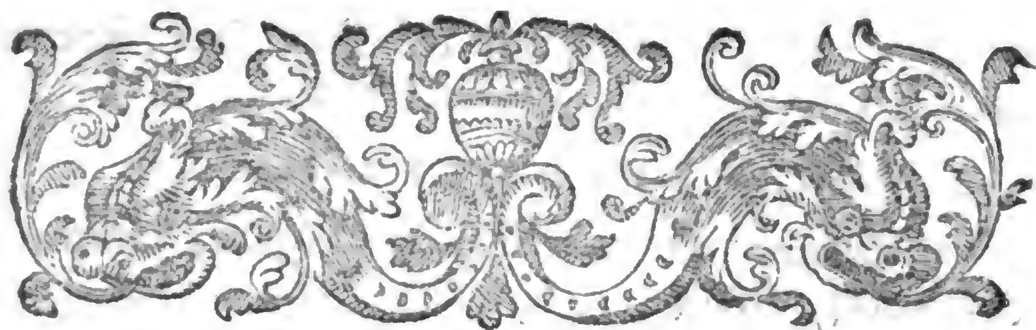
Tandem cum nostra haec methodus ab Euclidea maxime distet, necessum fuit, ut ordo Propositionum Euclidis, quae in Mathesi citari solent, penitus verteretur. Quare, ne quid incommodi patiantur qui hisce elementis operam navant, Elenchum Propositionum Euclidis ad hujus Tractatus calcem posuimus, ut locus, quem habent

singulae

singulae in hoc Tractatu, uno ictu oculi conspiciatur. Nemini autem mirum videri debet, si quaedam Propositiones Euclidis in hoc Tractatu fuerint praetermissae; novimus enim illas nullum ferme habere usum, neque esse in nostra methodo necessarias. Quae omnia cum in studiosae juventutis commodum fuerint a nobis excogitata, benigne excipienda esse confidimus, ac speramus.



PARS



PARS PRIMA

DE FIGURARUM PLANARUM SYMPTOMATIS, AC MENSURIS

CAPUT I.

De principiis Geometriae.

DEFINITIO I.

1. eometria est Scientia, quae demonstrat proprietates quantitatis continuae, seu extensae, hoc est *Solidi*, *Superficiei*, & *Lineae*.

SCHOLION.

2. Cum dicimus *quantitatem*, id omne intelligimus, quod e partibus compositum potest concipi, & quidquid augmenti, vel decrementi capax est. Porro quantitas considerari potest, seu ut composita è partibus separatis inter se, seu ut constans partibus unitis, atque invicem connexis. Exempli causa, acervus arenae est quantitas, cujus partes separatae sunt; baculus est quantitas partibus unitis, continuisque praedita. Quantitas composita e partibus separatis, exprimitur numeris, & *Arithmetices* objectum constituit;

A quan-

quantitas vero, cujus partes continuae sunt, vocatur *extensa*, estque objectum Geometriae.

DEFINITIO II.

3. *Solidum* est quantitas in longum, latum, & profundum extensa.

SCHOLION.

TAB. I. FIG. I. 4. Quia quantitas AH extenditur iuxta longitudinem RS, iuxta latitudinem RO, & iuxta profunditatem, sive altitudinem RA; utique ipsa in longum, latum, & profundum extensa est, atque adeo erit (3) solidum.

DEFINITIO III.

5. *Superficies* est solidi terminus, seu quantitas in longum tantum, & latum extensa.

SCHOLION.

6. Cum solidum idem AH sit undique terminatum, habebit pro terminis superficies, sive facies laterales AS, FH, VO, LR, una cum suprema LF, infimaque OS, quae longae quidem, ac latae sunt, non autem profundae; alioquin non solum termini, sed partes quoque essent solidi AH.

DEFINITIO IV.

7. *Linea* est terminus superficiei, seu quantitas in longum tantum extensa.

SCHOLION.

8. Quoniam superficies AS, FH, VO, LR, LF, OS sunt finitae, utique earum quaelibet, ut LF, habet pro terminis lineas AF, FV, VL, LA, quae longae quidem sunt, sed non latae; alioquin non termini solum, sed partes quoque essent superficiei FL.

DE-

DEFINITIO V.

9. *Punctum* est terminus lineae, ac proinde nulla praeditum extensione.

SCHOLION.

10. Quia finitae sunt lineae AF, FV, VL, LA, utique illarum quaelibet, ut AF, pro terminis habet puncta A, & F, quae longa esse non possunt; alioquin non solum termini, sed partes quoque essent rectae AF.

DEFINITIO VI.

11. Linea AO dicitur *recta*, si brevissima sit omnium linearum habentium eosdem terminos A, & O. TAB. I. FIG. 2.

COROLLARIUM I.

12. Quare si inter omnes lineas AEO, ASO, AO &c. habentes eosdem terminos A & O, una AO brevitate caeteris antecellat, haec linea recta erit.

COROLLARIUM II.

13. Ergo a puncto ad punctum unica tantum recta linea duci potest, quippe inter haec puncta unica tantum linea omnium brevissima esse potest.

COROLLARIUM III.

14. Cum a puncto ad punctum unica tantum recta linea duci (13) possit, sequitur duas rectas per eadem duo puncta traductas, mutuo coincidere; unde puncta duo positione data sufficiant, ut determinetur positio lineae.

COROLLARIUM IV.

15. Duae ergo rectae spatium minime claudunt. Ut enim duae lineae, veluti AEO, ASO, spatium claudant, TAB. I. FIG. 2.

 dant,

dant, ambae transire debent per duo puncta A, & O, quin mutuo coincidant, quod duabus rectis lineis convenire non (14) potest.

COROLLARIUM V.

Tab. 1. Fig. 3. 16. Ad spatium ergo claudendum tres saltem necessariae sunt rectae EF, EA, AF, quarum una quaevis EF minor erit summa reliquarum EA, AF; nam recta EF brevior (11) erit inflexa linea EAF, habente eosdem terminos E, & F.

DEFINITIO VII.

17. *Planum* seu *Plana superficies* est brevissima omnium habentium eosdem terminos.

DEFINITIO VIII.

Tab. 1. Fig. 4. 18. *Angulus planus rectilineus* est duarum rectarum AE, AC in plano mutuo se tangentium, alterius ad alteram inclinatio. Punctum A anguli *vertex* dicitur; rectae vero AE, AC vocantur ejusdem *crura*

COROLLARIUM I.

19. Igitur eadem crurum inclinatione manente, nec augetur, nec minuitur angulus, quamvis eiusdem crura, vel latera augeantur, vel minuantur.

COROLLARIUM II.

Tab. 1. Fig. 4. 5. 20. Equales ergo erunt anguli EAC, FOR, si dum sibi vertices A, & O mutuo imponuntur, crura AE, AC coincidant cum cruribus OF, OR; tunc enim crura anguli utriusque sunt aequaliter ad se invicem inclinata.

COROLLARIUM III.

Tab. 1. Fig. 5. 6. 21. Si vero dum sibi imponuntur vertices A & O, crus quidem unum OF coincidat cum AE, sed reli-

reliquum crus OR cadat intra angulum EAC; hic angulus maior erit altero FOR.

DEFINITIO IX.

22. Si recta linea RA super rectam lineam CF consistens, duos qui sunt deinceps, angulos RAC, RAF aequales inter se fecerit, *rectus* est uterque aequalium angulorum, & quae insistit recta linea RA, *perpendicularis* vocatur ad aliam rectam CF, cui insistit. TAB. I. FIG. 7.

COROLLARIUM.

23. Si recta RA perpendicularis sit ad aliam rectam AC, seu si rectus fuerit (22) angulus RAC; producta CA ad F, angulus deinceps positus RAF aequabitur (22) alteri RAC.

DEFINITIO X.

24. Angulus *acutus* dicitur, qui minor est recto, ut EAC; *obtusus* autem, qui recto maior, ut EAF. TAB. I. FIG. 7.

DEFINITIO XI.

25. *Distantia* puncti a linea recta, est linea brevissima omnium, quae ex illo ad hanc duci possunt.

DEFINITIO XII.

26. Lineae rectae AR, CF dicuntur mutuo *parallelae*, si in eodem plano jacentes, & utrinque in infinitum productae, eandem semper distantiam servent inter se. TAB. I. FIG. 8.

COROLLARIUM I.

27. Erunt ergo parallelae AR, CF, si puncta singula unius AR eandem semper ubique distantiam servent ab alia recta CF.

COROLLARIUM V.

28. Parallelae igitur AR, CF nunquam poterunt convenire; alioquin non eandem ubique haberent distantiam inter se.

DEFINITIO XIII.

29. Lineae, quae concursu suo spatium comprehendunt, *figuram* efficiunt. Haec autem dicitur *rectilinea*, si lineae claudentes spatium, rectae fuerint; *curvilinea* autem, si curvae.

DEFINITIO XIV.

TAB. I. FIG. 9.

30. Circulus est figura plana unica curva linea comprehensa, quae vocatur *circumferentia*, ad quam omnes rectae lineae CA, CS, CH &c. a puncto medio C quod *centrum* dicitur, ductae, aequales sunt inter se. Hae autem aequales rectae *radii*, vel *semidiametri* circuli nuncupantur.

COROLLARIUM I.

31. Igitur circumferentiae idem centrum habentes, vel sibi invicem nunquam occurrent, vel si occurrant, mutuo coincidant oportebit. Nam si circumferentiae radios habeant inaequales, illa cujus minor est radius, tota intra reliquam cadet, cujus radius maior est, ideoque sibi invicem non occurrent. Si vero circumferentiae aequales habeant radios, tunc ambae a communi centro aeque distabunt, ac proinde mutuo coincidant oportebit.

COROLLARIUM II.

32. Duae igitur circumferentiae ita sibi occurrentes, ut non coincidant, commune centrum non habent; nam si haberent, utique vel sibi numquam (31) occurrerent, vel ambae mutuo coinciderent.

Co-

COROLLARIUM III.

33. Quare circuli se secantes, aut etiam mutuo se tangentes, commune centrum non habent.

DEFINITIO XV.

34. Linea recta AH per centrum ducta, & utrinque ad circumferentiam circuli terminata, *diameter* dicitur, quae circulum, & circumferentiam in duas aequales dividit partes. TAB. I FIG. 9.

DEFINITIO XVI.

35. Recta SH utrinque ad circumferentiam circuli terminata, sed non traducta per eius centrum, vocatur *chorda* circuli, aut *subtensa*.

DEFINITIO XVII.

36. Circuli *arcus* est pars quantalibet circumferentiae; *gradus* autem est pars eiusdem tercentesima sexagesima. Singulos gradus partimur in 60 aequales partes dictas *minuta prima*, & quodvis minutum in 60 *minuta secunda*, atque ita semper. Quare circumferentia erit gradum 360, dimidia vero circumferentia graduum 180, quadrans demum graduum 90.

DEFINITIO XVIII.

37. Portio circuli SHV comprehensa a chorda SH, & arcu SVH, dicitur *segmentum* circuli. Segmentum SHV, quod semicirculo minus est, vocatur *segmentum minus*, reliquum vero segmentum SHA *segmentum majus*.

DEFINITIO XIX.

38. *Angulus ad circumferentiam* est, cujus vertex, & crura ad circumferentiam circuli terminan- TAB. I. FIG. 9.

 tur,

tur, veluti eſt angulus AHS. *Angulus* vero *ad centrum* eſt ille, cujus vertex in centro circuli eſt, crura autem ad circumferentiam circuli terminantur, veluti eſt angulus ACS.

DEFINITIO XX.

TAB. I. FIG. 9. 39. Recta LO circulum *tangit* in A, ſi ita ipſi occurrat, ut extra circulum tota cadat.

DEFINITIO XXI.

TAB. I. FIG. 10. 11. 40. Circulus ACF alium ARS *intus tangit*, ſi ita illi occurrit, ut totus intra ipſum cadat. Circulus vero ARS alium OSE *extra tangit*, ſi ita illi occurrit, ut totus extra ipſum cadat.

DEFINITIO XXII.

TAB. I. FIG. 3. 41. *Triangulum rectilineum* EAF eſt figura tribus rectis lineis terminata, quae eiuſdem *latera* dici ſolent. Haec autem latera ſi aequaentur, triangulum dicitur *aequilaterum*; ſi duo tantum latera ſint aequalia, triangulum vocatur *iſoſceles*; demum ſi latera omnia fuerint inaequalia, triangulum *ſcalenum* dicitur.

DEFINITIO XXIII.

42. In quovis triangulo EAF latus AE, ad quod terminantur crura FA, FE anguli F, dicitur *oppoſitum* angulo eidem F.

DEFINITIO XXIV.

43. Triangulum *rectangulum* illud eſt, quod unum angulum rectum habet; *obtuſangulum* vero, quod unum obtuſum habet; denique *acutangulum* appellatur, quod tres angulos acutos habet.

De-

DEFINITIO XXV.

44. Inter figuras quadrilateras *trapezium* est, quod habet inequalia latera, & angulos inaequales,

DEFINITIO XXVI.

45. *Rectangulum* AEFC est figura quadrilatera, quae quatuor angulos rectos habet; sive latera aequalia sint, sive non. TAB. I. FIG. 12.

DEFINITIO XXVII.

46. *Quadratum* RCLH est figura quadrilatera, quae quatuor angulos habet rectos, & omnia latera aequalia; unde omne quadratum est (45) rectangulum, sed non contra. TAB. I. FIG. 13.

DEFINITIO XXVIII.

47. *Rhombus* AEFC est figura quadrilatera, quae habet quidem omnia latera aequalia, sed angulos inaequales. TAB. I. FIG. 14.

DEFINITIO XXIX.

48. *Rhomboides* ALSO est figura quadrilatera, quae adversos angulos, & opposita latera habet aequalia, sed neque aequiangula, neque aequilatera est. TAB. I. FIG. 15.

DEFINITIO XXX.

49. *Parallelogrammum* AEFC est figura quadrilatera, quae bina opposita latera AF, CF, & AC, EF habet parallela. Recta autem AF jungens oppositos angulos A, & F, vocatur *diagonalis*. TAB. I. FIG. 12.

DEFINITIO XXXI.

50. Figura CRHL dicitur *circulo circumscripta*, si singula ejus latera circulum tangant; figura autem AEOS vocatur *circulo inscripta*, si omnes ejusdem anguli fuerint in circumferentia. TAB. I. FIG. 16.

DEFINITIO XXXII.

51. Figura *polygona* est, quae pluribus, quam quatuor lateribus terminatur. Si latera fuerint quinque, seu, septem &c. figura *pentagonum, Hexagonum, Heptagonum* dici solet.

DEFINITIO XXXIII.

52. Figura polygona est *regularis*, aut *ordinata*, quae aequilatera, & aequiangula est.

DEFINITIO XXXIV.

53. *Mensura quantitatum* est quantitas, quae aliquoties sumpta illam adaequat. Sic longitudo unius pedis est mensura longitudinis decem pedum, quia illa decies sumpta, hanc adaequat. Ita unitas quoque est mensura numeri integri cujuscunque, nam illa aliquoties repetita, numerum integrum quemvis aequat.

DEFINITIO XXXV.

54. *Mensura linearum* est linea recta arbitrariae longitudinis in partes minores pro lubitu dividenda, & subdividenda. Dividitur autem hodie a Geometris in decem aequales partes, quas *pedes* dicunt, unde ipsa *decempeda*, aut etiam *pertica* appellatur. Pes subdividitur in decem *digitos*, digitus in decem *lineas*, & sic porro. Summa autem omnium decempendarum, pedum, digitorum &c., qui accurate in recta linea continentur, ejusdem magnitudinem repraesentat.

SCHOLION.

55. Longitudo, & divisio mensurae linearum non est eadem ubique gentium. Aliquas celebrium mensurarum varietates exponet Tabula sequens in particulis istiusmodi, qualium Pes Regius Parisinus est 1440.

Con-

Continet is nempe 12 digitos, digitus 12 lineas, linea 10 particulas, ideoque pes integer parisinus continebit particulas 1440. *Passus* est pedum 5, & *Milliare* est passuum 1000.

Pes Regius			
Parisinus	1440.	Cubitus Florentinus	2597.
Romanus	1320.	Brachium Florentinum Agrimensorum	2430.
Rhenanus	1391. $\frac{3}{10}$	Brachium Senense	2672 $\frac{16}{25}$
Londinensis	1350	Brachium Mediolanense	2166.
Suecicus	1316. $\frac{1}{2}$	Brachium Parmense	2423.
Venetus	1540.	Brachium Bononiense	2640.
Bononiensis	1682. $\frac{2}{5}$	Brachium Parisiense	5226.

DEFINITIO XXXVI.

56. *Quantitates commensurabiles* illae sunt, quae aliquam communem mensuram habent. Sic pes romanus, & parisinus commensurabiles sunt, cum pro communi mensura habeant particulam, seu decimam partem lineae. Pes siquidem parisinus hujusmodi particulas continet 1440; romanus autem 1320. Sic etiam numeri integri qualescumque commensurabiles sunt, habent enim ad minus pro communi mensura unitatem.

DEFINITIO XXXVII.

57. *Quantitates incommensurabiles* illae sunt, quae nullam habent communem mensuram. Has autem quanti-

titates revera dari in Geometria, inferius ostendemus.

DEFINITIO XXXVIII.

58. *Mensura superficierum* est quadratum, cujus latus est perticae aequale, diciturque *pertica quadrata*. Haec dividitur in pedes quadratos, & pes quadratus in digitos quadratos, & sic porro. Summa autem omnium perticarum, pedum, digitorum &c. quadratorum, qui accurate in alicujus figurae superficie continentur, repraesentat ejusdem *aream*, aut magnitudinem spatii ab ejus lateribus comprehensi.

SCHOLION.

59. Et sane sicut linearum mensura est (54) linea, ita mensura superficierum est superficies. Si quis enim metiri velit in perticis superficiem, adhibenda ab ipso est superficies unius perticae. Jam vero nequit excogitari superficies unius perticae, nisi concipiatur figura, quae in longum, & latum contineat unam perticam, seu nisi concipiatur (46) pertica quadrata; ergo quadrata pertica est adhibenda. Idem de aliis mensuris, sive de pedibus, & digitis est dicendum; unde mensura superficierum erit quadratum.

DEFINITIO XXXIX.

60. *Theorema* est propositio, quae proponit aliquid demonstrandum. *Problema* est propositio, quae proponit aliquod efficiendum. *Lemma* est propositio praemissa alteri eo fine, ut hujus demonstratio evadat brevior. Quaelibet propositio *hypotesim* continet, atque *thesim*: illa recenset conditiones, sub quibus aliquid affirmatur, aut negatur; haec autem complectitur quod affirmatur, aut negatur.

De-

DEFINITIO XL.

61. *Postulata* sunt quaedam operationes, quas Geometria ex Mechanicis mutuatur. Constat autem, has perfici posse, & reipsa per circinum, & regulam facile perficiuntur. Sunt autem quatuor, quae sequuntur.

I.

62. A puncto ad punctum rectam lineam ducere.

II.

63. Rectam lineam terminatam in directum producere quantùm libet.

III.

64. Ex dato puncto veluti centro, dato intervallo, tamquam radio, circulum describere.

IV.

65. Ex recta majori auferre partem minori aequalem.

DEFINITIO XLI.

66. *Axiomata* sunt veritates tam certae, tamque perspicuae, ut solis terminis intellectis, assensum mentis extorqueant. Sunt autem sequentia.

I.

67. Si aequalibus aequalia addas, tota erunt aequalia.

II.

68. Si ab aequalibus aequalia demas, quae remanent, sunt aequalia.

III.

III.

69. Si ab aequalibus demas inaequalia, quae remanent, ſunt inaequalia.

IV.

70. Si inaequalibus aequalia addas, tota erunt inaequalia.

V.

71. Si ab inaequalibus aequalia demas, quae remanent, ſunt inaequalia.

VI.

72. Totum ſua parte maius eſt; aequale eſt autem partibus ſimul ſumptis.

VII.

73. Quae ſuper impoſita mutuo ſibi congruunt, ſunt aequalia.

VIII.

74. Aequales rectae, aequales ſemicirculi, & aequales arcus eiuſdem circuli mutuo ſibi congruunt.

IX.

75. Quae eidem ſunt aequalia, ſunt quoque aequalia inter ſe.

X.

76. Quae eiuſdem, vel aequalium ſunt dupla, tripla &c., ſunt quoque aequalia inter ſe.

CA-

CAPUT II.

De mutua rectarum cum curvis circularibus intersectione, & triangulorum symptomatis principalibus.

PROPOSITIO I.

77. *Si ex eodem puncto A extra circuli centrum sumpto, ducantur quotvis rectae AE, AS, AR, AO ad cavitatem circumferentiae terminatae; omnium maxima erit AR per ejus centrum C traducta. Et si arcus RO sit arcui RS aequalis; etiam recta AO aequabitur ipsi AS.* TAB. I. FIG. 17. 18. 19.

I. Ducatur ex centro C radius (62) CO. Cum radius CR sit aequalis (30) radio CO, addita utrinque AC, summa AC, & CR, seu recta AR aequalis erit duobus (67) simul AC, CO. Sed in triangulo ACO duae simul AC, CO sunt (16) maiores tertia AO; ergo etiam AR maior erit AO. Simili ratiocinio eadem AR maior ostenderur quaecunque alia; ergo omnium maxima est AR.

II. Cum arcus RO aequalis sit (*ex hyp.*) arcui RS, si semicirculus FOR ponatur supra alium FER, utique arcus RO congruet cum (74) sibi aequali RS, punctumque O cadet in S; igitur etiam AO congruet cum (14) AS, ideoque (73) illi aequalis erit. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM

78. Ergo in circulo EFOR omnium chordarum maxima est diameter FCR, TAB. I. FIG. 19.

PRO-

PROPOSITIO II.

TAB. I. FIG. 17. 18. 19.

79. *Iiſdem poſitis, ſi arcus RO ſit minor arcu RE; viciſſim recta AO major erit AE.*

Sit arcui RO aequalis alter RS, iunctaque AS, quae (77) aequabitur ipſi AO, agatur CE, ſecans AS in I. In triangulo CIS duae ſimul rectae CI, IS ſunt (16) maiores tertia CS. Sed eſt (30) CS ipſi CE aequalis; igitur duae ſimul CI, IS maiores quoque erunt ipſa CE, unde hinc inde ablata CI, erit IS (71) maior IE. Si ergo tam maiori IS, quam minori IE addatur IA, tota AS major (70) erit duabus ſimul IE, IA: ſed hae in triangulo EIA ſunt (16) maiores AE; ergo AS, vel ſibi aequalis AO, multo maior erit AE. Q. E. D.

COROLLARIUM.

TAB. I. FIG. 17.

80. Hinc ex eodem puncto A extra circuli centrum ſumpto, poſſunt quidem (77) duci ad cavitatem circumferentiae duae rectae aequales, veluti AO, AS, tres vero (79) nunquam; ideoque punctum, ex quo tres rectae aequales ad circumferentiam circuli duci poſſunt, erit eiuſdem centrum.

PROPOSITIO III.

TAB. I. FIG. 17. 18. 19.

81. *Iiſdem poſitis, ſi recta AO aequalis ſit ipſi AS; etiam arcus RO aequalis erit arcui RS.*

Arcus RO nequit eſſe minor arcu RS; nam ſi ita, recta AO maior foret (79) AS, contra hypoteſim. Sed neque arcus idem RO maior eſſe poteſt arcu RS, quia ſi eſſet, recta AO minor (79) foret AS, iterum contra hypoteſim. Cum ergo arcus RO nec major, nec minor ſit arcu RS, huic aequalis erit. Q. E. D.

Co-

COROLLARIUM.

82. Hinc si ex eodem circumferentiae puncto A ope circini capiantur utrinque duae chordae equales AO, AS; subtendent ipsae aequales arcus AO, AS. Ducta enim chorda maxima, sive (78) diametro ACR, dimidia circumferentia AOR aequatur (34) alteri ASR: sed ob aequales (*ex hyp*). rectas AO, AS arcus RO (81) adaequat arcum RS; ergo & reliquus arcus AO reliquo AS erit aequalis. TAB. I. FIG. 19.

PROPOSITIO IV.

83. *Si latera singula AC, CO, OA trianguli ACO aequentur lateribus singulis AC, CS, SA trianguli ACS; etiam anguli aequalibus lateribus oppositi, & tota triangula aequabuntur.* TAB. I. FIG. 17. 18. 19.

Centro C, & intervallo CO describatur (64) circulus OEF, qui ob aequales (*ex hyp.*) CO, CS, transibit quoque per S. Producatur (63) AC ad R. Quia AO ponitur aequalis AS, aequabuntur (81) arcus RO, RS, unde si semicirculus FOR superimponatur reliquo FSR, punctum O cadet (74) in S, totumque triangulum AOC congruet alteri ASC; ideoque (73) huic aequale erit, & angulus ACO aequabitur ACS, angulus AOC aequabitur ASC, ac reliquus CAO aequalis erit reliquo CAS. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

84. Hinc si duo circuli LBH, BGH habentes centra in A, & C, mutuo se secuerint; ipsi in duobus punctis B, & H tantummodo se secabunt. Nam si fieri potest, se quoque secent in tertio puncto G; tum ducta AC jungente illorum centra, agantur AB, AG, CB, CG. Cum ergo circulus LBH TAB. I. FIG. 20.

transeat quoque per punctum G, rectae AB, AG erunt illius radii, & propterea aequales (30) etiam inter se. Sunt vero etiam aequales (30) CB, CG, quia sunt radii circuli BGH; igitur duo latera AB, BC trianguli ABC aequabuntur duobus AG, GC trianguli AGC. Sed tertium latus AC utrique triangulo est commune; ergo triangulum ABC (83) aequabitur alteri AGC, & angulus BCA aequabitur angulo GCA, pars toti, quod est absurdum.

COROLLARIUM II.

Tab. I. Fig. 21. 85. Inde novimus bisecare datum rectilineum angulum EAL. Sumptis enim (65) aequalibus AC, AS, & juncta CS, centris C, & S, & radio CS, describantur duo circuli SOH, COF se secantes in O, & jungatur AO, quae bisecabit angulum EAL. Cum enim C sit centrum circuli SOH, radius CO (30) aequalis erit radio CS: atqui ob centrum S circuli COF, etiam radius OS aequatur (30) radio CS; ergo & CO aequabitur (75) ipsi OS. Sed reliqua etiam latera CA, AO trianguli OCA sunt (*ex constr*) aequalia reliquis SA, AO trianguli OSA; ergo triangulum OCA (83) aequabitur alteri OSA, & angulus CAO angulo SAO, unde AO bisecat angulum CAS, vel datum alterum EAL.

COROLLARIUM III.

86. Quia rectae CO, OS, CS, ostensae (85) sunt aequales, aequilaterum (41) erit triangulum COS. Igitur liquet modus supra datam quamcunque rectam CS triangulum aequilaterum describendi.

COROLLARIUM IV.

Tab. I. Fig. 22. 87. Similiter ex dato in recta OR quolibet puncto H erigetur ad illam perpendicularis HA. Sumptis enim utrinque a puncto H aequalibus rectis HS, HL

HL, superque SL facto triangulo (86) aequilatero SAL, jungatur AH, quae perpendicularis quaesita erit. Cum enim singula latera HS, SA, AH trianguli SAH aequentur singulis lateribus HL, LA, AH trianguli LAH, utique (85) angulus AHS aequalis erit angulo AHL, ideoque erit AH perpendicularis (22) ad rectam OR.

COROLLARIUM V.

88. Demum ad punctum A rectae AV pronum est angulum efformare aequalem alteri dato O. Centris siquidem O, & A, radiisque aequalibus OR, AE describantur arcus RC, EL, junctaque chorda RC, huic aequalis capiatur circino chorda EF, perque F traiiciatur AS, quae cum AV quaesitum angulum efformabit. Singula quippe latera trianguli AFE aequantur (*ex constr*) singulis lateribus alterius trianguli OCR; ideoque (83) angulus A aequalis erit angulo dato O. TAB. I. FIG. 23. 24.

PROPOSITIO V.

89. *Mensura cujusvis ad centrum anguli ASV est arcus AV, inter crura anguli interceptus.* TAB. I. FIG. 25.

Ducta chorda VA, huic aequalis circino capiatur alia chorda VR, eruntque (82) aequales quoque arcus VA, VR; ideoque arcus AR duplus erit arcus AV. Igitur latera singula SA, AV, VS trianguli ASV aequantur singulis lateribus SR, RV, VS trianguli RVS, ac proinde angulus ASV (83) aequabitur RSV, unde angulus ASR duplus erit anguli ASV. Vidimus autem etiam arcum AR duplum esse arcus AV; ergo si arcus AR sit duplus arcus AV, etiam angulus ASR est duplus anguli ASV. Simili modo si arcus AF sit triplus arcus AV, angulus ASF triplus ostendetur anguli ASV; ergo ar-

cus AV exprimit quantitatem anguli ASV, sive est mensura anguli ASV; si enim ita non foret, duplicato, aut triplicato arcu AV, non duplicaretur, aut triplicaretur angulus ASV. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

90. Hinc quando dicitur arcum AV mensuram esse anguli ASV, non intelligitur mensura in eo sensu, quem superius (53) explicavi, sed ejus nomine solum quantitas intelligitur, quae quantitatem anguli repraesentat; adeo ut dici possit, tot graduum esse angulum ASV, quot continentur in intercepto arcu AV.

COROLLARIUM II.

TAB. I. FIG. 26. 91. Rectus ergo angulus KLA erit graduum 90. Centro enim L descripto semicirculo AKE, producatur AL ad E, ut novus emergat angulus KLE, aequalis (23) recto KLA. Cum ergo aequentur anguli KLA, KLE, utique aequabuntur quoque illorum mensurae, nempe (89) arcus AK, KE, ideoque arcus AK semissis erit dimidiae circumferentiae AKE: haec autem est (36) graduum 180; ergo arcus AK erit graduum 90.

COROLLARIUM III.

92. Cum recti anguli cujusvis mensura sit (91) graduum 90; omnes recti anguli aequari debent, & duorum rectorum mensura erit graduum 180, mensura vero rectorum quatuor, erit graduum 360.

COROLLARIUM IV.

93. Quia angulus acutus est recto (24) minor, sicuti vicissim obtusus (24) major est recto; angulus acutus minor erit (91) gradibus 90, obtusus vero 90 gradibus major erit.

Co-

COROLLARIUM V.

94. Hinc ope semicirculi AOL in 180 gradus divisi, detegentur gradus dati anguli RPQ. Nam si semiciruli ejusdem centrum ita ponatur supra verticem P anguli RPQ, ut illius radius PL cadat super hujus latus unum PQ, tunc arcus LO cruribus anguli interceptus, ostendet gradus (89) dati anguli RPQ. TAB. I. FIG. 27.

COROLLARIUM VI.

95. Novimus quoque ad punctum P datae rectae PQ efficere angulum RPQ graduum quorumcunque. Sit enim faciendus angulus RPQ graduum 40; tum semicirculi ejusdem centro sic posito supra P, ut ejus radius PL coincidat cum PQ, numerentur 40 gradus ab L ad O, notatoque puncto O, per hoc trajiciatur recta PR, quae cum PQ efformabit (89) quaesitum angulum RPQ.

COROLLARIUM VII.

96. Demum si duae rectae RO, CF secuerint se in E, anguli ad verticem E oppositi aequales erunt. Cum enim semicircumferentia CRF aequetur (34) alteri RCO, utrinque ablato arcu CR, reliquus arcus RF aequalis (68) erit reliquo CO, & proinde angulus REF aequabitur (89) CEO. Eodem modo ostendentur aequales anguli REC, FEO. TAB. I. FIG. 1.

SCHOLION I.

97. Pronum ex dictis est altitudinum, & distantiarum angulos invenire. Esto imprimis detegendus angulus CAB sub quo apparet ex A altitudo turris CB. Baculum solo infige, tum quadrantem AFL in 90 gradus, & minuta divisum ea lege ipsi impone, ut radius unus AF sit perpendicularis, alter vero TAB. II. FIG. 2.

AL parallelus ad horizontem, Deinde regulam AO convertibilem circa A, ita attolle, aut deprime, donec oculus centro A admotus, & per utramque dioptram regulae AO collineans, videat apicem C altitudinis mensurandae. Metire demum quadrantis arcum LO, notamque habebis quantitatem anguli CAB. Quot enim gradus & minuta continet idem arcus LO, tot graduum & minutorum erit altitudinis angulus (89) CAB.

TAB. II. FIG. 3. Simili modo invenies altitudinem apparentem sideris dati S. Sumpto quadrante LCV in gradus & minuta diviso, ipsum sic colloca, ut filum CD, cui appensum est pondus D, ejus limbum contingat in puncto E. Tum circa axem C ita quadrantem verte, ut oculus in L positus, collineansque per tubum radio LC aptatum, aut etiam per dioptras, videat sidus S. Metire denique arcum EV, qui indicabit quantitatem anguli SCO, sub quo apparet sideris altitudo. Cum enim filum CE perpendiculare sit ad horizontalem rectam AO, utique si productum fuerit usque ad Zenit Z, prodibit rectus (22) angulus ZCO, qui idcirco aequalis erit recto (92) alteri LCV. Sed angulus ZCS aequatur (96) sibi ad verticem opposito LCE; ergo etiam reliquus SCO aequabitnr reliquo ECV. Sed arcus EV (89) mensura est anguli ECV; ergo & mensura erit anguli SCO.

TAB. II. FIG. 4. Eadem quoque est methodus adhibenda, ut inveniatur angulus XAZ, sub quo apparet ex puncto A distantia locorum X & Z. Planum semicirculi CBD in 180 gradus & minuta divisi, statue in plano XAZ. Tum regulam AC dirige versus X, donec oculus in A positus, & collineans per AC videat signum X, collineans autem per AB videat signum Z. Metire denique arcum BC, qui (89) magnitudinem referet quaesiti anguli XAZ.

PRO-

PROPOSITIO VI.

98. *Si recta RE insistat rectae CF; anguli REC, REF duobus rectis aequales erunt.* TAB. II. FIG. 1.

Centro E, & intervallo EC describatur circulus CRFO. Quia arcus RC mensura est (89) anguli ad centrum REC, & arcus RF mensura est (89) anguli REF, liquet duos angulos simul sumptos REC, REF mensurari a dimidia circumferentia CRF: haec vero utpote (36) graduum 180, est duorum (92) rectorum mensura; ergo duobus rectis aequales erunt anguli REC, REF. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

99. Eodem modo demonstrabitur, si plures rectae SE, RE ad idem punctum insistant eidem rectae CF, effici angulos CES, SER, REF duobus rectis aequales. TAB. II. FIG. 5.

COROLLARIUM II.

100. Duae rectae se invicem secantes RO, CF efficiunt ad E angulos, qui rectis quatuor sunt aequales. Nam eadem ratione, qua anguli REC, REF duobus (98) rectis aequantur, aequales quoque duobus rectis erunt anguli OEC, OEF; igitur omnes anguli ad E positi rectis quatuor sunt aequales. TAB. II. FIG. 1.

COROLLARIUM III.

101. Similiter si per idem punctum E traiiciantur rectae quotcunque CF, SQ, RO, omnes anguli ad E positi aequales erunt quatuor rectis. Nam eadem ratione, qua anguli CES, SER, REF duobus (99) rectis aequantur, aequales quoque erunt duobus rectis reliqui CEO, OEQ, QEF; ergo omnes anguli ad E positi aequales sunt quatuor rectis. TAB. II. FIG. 5.

COROLLARIUM IV

Tab. II. Fig. 1. 102. Patet etiam quemvis angulum REC duobus rectis esse minorem; complet enim duos rectos (98) cum altero deinceps posito REF.

COROLLARIUM V.

103. Demum si duae rectae CE, FE ad idem punctum rectae RE faciant utrinque angulos REC, REF duobus rectis aequales; eaedem CE, EF unam rectam component, seu erunt positae in directum. Cum enim anguli REC, REF duobus (*ex hyp*) rectis aequentur, utique arcus CRF erit (92) graduum 180, seu dimidia (36) circumferentia; igitur rectae CE, EF component diametrum, seu rectam lineam CEF.

Tab. II. Fig. 1.

PROPOSITIO VII.

Tab. I. Fig. 17. 18. 19. 104. *Si latera AC, CO trianguli ACO aequentur lateribus AC, CE trianguli ACE, & angulus ACO sit major angulo ACE; etiam latus reliquum AO majus erit reliquo AE.*

Centro C, & intervallo CO describatur circulus OSF, qui ob (*ex hyp*). aequales CO, CE, transibit quoque per punctum E. Producatur AC ad R. Cum recta OC insistat rectae AR, duo anguli ACO, OCR duobus (98) rectis aequantur, atqui ex eadem ratione etiam duobus rectis aequantur duo anguli ACE, ECR; ergo duo anguli ACO, OCR aequantur duobus angulis ACE, ECR. Sed angulus ACO major (*ex hyp*) est ACE; ergo vicissim reliquus OCR minor (69) erit reliquo ECR, ideoque arcus RO minor (89) erit arcu RE. Igitur AO major (79) erit AE. Q. E. D.

Co-

COROLLARIUM.

105. Hinc si circuli unus arcus AE sit major altero arcu RO, etiam chorda AE major erit chorda RO. Junctis enim radiis CA, CE, CR, CO, duo latera AC, CE trianguli EAC aequalia erunt duobus lateribus RC, CO trianguli ORC. Sed ob arcum AE majorem (*ex hyp*) arcu RO, etiam angulus ACE major est (89) angulo RCO; igitur chorda AE major (104) est chorda RO. TAB. II. FIG. 6.

PROPOSITIO VIII.

106. *Si latera AC, CO trianguli ACO aequentur lateribus AC, CS trianguli ACS, & angulus ACO sit aequalis angulo ACS; etiam reliquum latus AO aequale erit reliquo AS, & ipsa triangula, angulique aequalibus lateribus oppositi aequabuntur.* TAB. I. FIG. 17. 18. 19.

Centro C, & intervallo CO describatur circulus OEF, qui ob aequales CO, CS, transibit quoque per S, & producatur AC ad R. Cum recta OC insistat rectae AR, duobus (98) rectis aequales erunt anguli ACO, OCR. Eadem ratione duobus rectis etiam aequales erunt anguli ACS, SCR; igitur anguli ACO, OCR aequabuntur angulis ACS, SCR. Sed angulus ACO aequatur (*ex hyp*) angulo ACS; ergo reliquus OCR aequabitur (68) reliquo SCR, ideoque arcus OR aequalis erit (89) arcui SR, & recta AO (77) aequabitur ipsi AS. Sed etiam reliqua latera AC, CO trianguli ACO aequalia sunt (*ex hyp*) lateribus reliquis AC, CS trianguli ACS; ergo (83) triangula ipsa, angulique lateribus aequalibus oppositi aequabuntur. Q. E. D.

Co-

COROLLARIUM.

TAB. II. FIG. 7. 107. Quare si duo arcus AE, RO ejusdem circuli sint aequales, aequabuntur quoque chordae AE, RO. Nam latera AC, CE trianguli EAC aequantur lateribus (30) CR, CO trianguli CRC: sed ob arcum AE aequalem (*ex hyp*). arcui RO, etiam angulus ACE aequalis est (89) angulo RCO; ergo etiam chorda AE aequabitur (106) chordae RO.

PROPOSITIO IX.

TAB. I. FIG. 17. 18. 19. 108. *Si latera AC, CO trianguli ACO aequentur lateribus AC, CE trianguli ACE, sed reliquum latus AO sit majus reliquo AE; etiam angulus ACO major erit angulo ACE.*

Angulus ACO nequit esse minor angulo ACE; nam si ita, latus AO minus (104) foret AE, contra hypothesim. Sed neque idem angulus ACO aequalis esse potest angulo ACE, quia si esset, latus AO aequale (106) foret AE, rursus contra hypothesim; ergo angulus ACO major erit angulo ACE. Q. E. D.

COROLLARIUM.

TAB. II. FIG. 6. 109. Igitur si in circulo chorda AE sit major chorda RO; etiam arcus AE major erit arcu RO. Nam latera AC, CE trianguli ACE aequantur lateribus OC, CR trianguli RCO: sed reliquum latus AE majus est (*ex hyp*). reliquo RO; ergo etiam angulus ACE major erit angulo (108) RCO, seu arcus AE major erit (89) arcu RO.

PRO-

PROPOSITIO X.

110. *Bifariam secare datam finitam rectam CE.* TAB. II. FIG. 8.

Supra datam rectam CE facto (86) triangulo aequilatero CFE, agatur FA bifariam secans (85) angulum CFE, quae etiam bisecabit rectam CE in A. Nam latera CF, FA trianguli CAF aequantur (*ex constr*) lateribus EF, FA trianguli EAF: sed angulus CFA aequalis est (*ex constr*) angulo EFA; ergo etiam AC aequalis (106) erit AE, atque ita CE bisecta erit in A. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

111. Liquet quomodo data recta etiam in 4, 8, 16 &c. aequales partes partiri queat, singulas nimirum partes semper iterum bisecando.

PROPOSITIO XI.

112. *Ex dato extra rectam LH puncto C demittere ad eandem perpendicularem CG.* TAB. II. FIG. 9.

Centro C describatur circulus AEF datae LH occurrens in A & E. Tum chorda AE bifariam (110) secta in G, jungatur CG, quae perpendicularis erit ad datam rectam LH. Nam ductis CA, CE, tria latera AC, CG, GA trianguli AGC aequantur tribus (*ex constr*) lateribus EC, CG, GE trianguli EGC; ergo (83) angulus CGA aequabitur CGE, ideoque CG perpendicularis (22) erit ad chordam AE, vel ad rectam datam LH. Q. E. F.

Co-

Corollarium I.

113. Ex demonstratione hujus propositionis abunde liquet, quod si aliqua recta CO ducta ex circuli centro C, bifariam secet chordam AE in G, perpendicularis etiam eidem erit, adeo ut sit rectus angulus CGE.

Corollarium II.

114. Patet similiter, eandem rectam CO, quae bisecat chordam AE in G, etiam bisecare arcum AOE, quem chorda ipsa subtendit. Nam in triangulis mutuo aequilateris AGC, EGC aequales (83) sunt anguli ACG, ECG, vel anguli ACO, ECO, ideoque aequabuntur quoque (89) arcus AO, OE.

Corollarium III.

Tab. II. Fig. 10. 115. Demum duae chordae AE, LO, quae se secant in puncto G, non possunt se mutuo bisecare. Nam si hoc ponatur, recta CG ex centro C ad communem earum intersectionem ducta, perpendicularis utrique (113) erit, cum utramque secet bifariam in puncto G; ideoque rectus angulus CGE aequabitur recto alteri CGO, totum parti, quod est absurdum.

Scholion.

Tab. II. Fig. 11. 116. Ex hac perpendicularium doctrina illi, qui ludo trudiculari operam navant, discunt pilam adversariam repercutiendo amovere. Sed prius tanquam experientia notum praemitti debet, globum nimirùm perfecte elasticum A, cuiusmodi ferè sunt eburnei, oblique occurrentem plano immobili GK in I, ita resilire versus C, ut fiat angulus *reflexionis* CIK aequalis *incidentiae* angulo AIG. Hoc posito, sit FGKV mensae lusoriae portio, in qua sit sphaerularum altera impellenda C, altera qua impellenda est, A,

A, Demissa ex C ad repagulum GK perpendiculari (112) CS, haec producatur ad H, donec SH ipsi CS sit aequalis. Tum sphaerula A impellatur versus H, quae occurrens repagulo in I, resiliet per IC. Nam latera CS, SI trianguli ICS aequantur lateribus HS, SI trianguli IHS; quare cum (92) aequentur quoque recti anguli CSI, HSI, etiam (106) angulus CIS, vel CIK aequabitur HIS. Sed angulus HIS aequatur (96) angulo AIG ad verticem opposito; ergo etiam angulus CIK aequalis erit angulo AIG, & sphaerula A impulsa juxta AI, resiliet per rectam IC, atque amovebit adversariam pilam C.

PROPOSITIO XII.

117. *Perpendicularis AR ex quovis puncto A ad rectam SH ducta, est brevissima omnium rectarum, quae ex eodem puncto ad eandem rectam duci possunt.* TAB. II. FIG. 12.

Ducatur quaelibet alia AC, & producta AR ad F, donec sit RF ipsi AR aequalis, jungatur FC. Latera AR, RC trianguli CAR aequantur lateribus FR, RC trianguli CFR; ergo cum aequales sint recti anguli ARC, FRC, etiam aequales (106) erunt AC, CF; ideoque AC cum CF dupla erit AC, sicut ob aequales AR, RF, etiam AF dupla erit AR. Porro in triangulo CAF recta AC cum CF est (16) major AF; ergo etiam dupla AC major erit dupla AR, ideoque AC major quoque erit AR. Simili modo ostendam, quamlibet aliam rectam a puncto A ad rectam SH ductam, perpendiculari AR esse majorem; ergo omnium brevissima est perpendicularis AR. Q. E. D.

Co-

COROLLARIUM I.

118. Et viciſſim ſi recta AR eſt breviſſima omnium rectarum, quae ex puncto A ad rectam SH duci queunt, perpendicularis quoque eidem erit. Si enim non recta AR, ſed aliqua alia AC perpendicularis eſſet ad SH, utique non AR, ſed ipſa AC breviſſima (117) omnium eſſet, contra hypotheſim.

COROLLARIUM II.

119. Cum ex puncto A ad rectam datam SH unica tantum recta omnium breviſſima duci queat; unica quoque ex A ad eandem SH poterit duci perpendicularis AR.

COROLLARIUM III.

120. Quia diſtantia puncti A a recta SH eſt linea (25) breviſſima omnium, quae ex A ad eandem SH duci queunt; ſequitur, perpendicularem AR eſſe diſtantiam (117) puncti A a recta SH.

COROLLARIUM IV.

TAB. II. FIG. 8. 121. Cum altitudo figurae cujuslibet CFE ſit diſtantia verticis F a baſi CE; liquet, perpendicularem FA altitudinem eſſe figurae CFE,

COROLLARIUM V.

TAB. II. FIG. 13. 122. Quare ſi recta LF parallela ſit alteri AE, atque ex illius punctis quibuslibet C & R ad hanc demittantur perpendiculares CO, RH; hae mutuo aequabuntur. Nam diſtantiae punctorum C, & R ab eadem recta AE, mutuò (27) ſunt aequales: ſed perpendiculares CO, RH ſunt (120) diſtantiae punctorum C, & R ab eadem recta AE; ergo perpendiculares CO, RH invicem aequabuntur.

Co-

COROLLARIUM VI.

123. Novimus inde per datum punctum R extra rectam datam AE acceptum, eidem ducere parallelam. Demissa (112) enim RH perpendiculari ad AE, ad hanc ex quolibet puncto O excitetur (87) perpendicularis OC ipsi RH aequalis: dico rectam LF trajectam per C, & R, parallelam esse ad AE. Si enim ita non sit, esto ad AE parallela alia recta PS, quam secet OC in Q; ergo ob parallelas PS, AE, aequales (122) erunt perpendiculares QO, RH. Sed est RH ipsi CO (*ex constr*) aequalis; ergo etiam aequales erunt QO, CO, quod (72) est absurdum. TAB.II. FIG. 14.

PROPOSITIO XIII.

124. *Recta FR ad extremitatem C radio CO perpendicularis, circulum tangit in unico puncto C.* TAB.II. FIG. 15.

Sumpto quolibet puncto H in recta FR, jungatur OH. Quia FR perpendicularis (*ex hyp*). est ad OC, vicissim quoque OC perpendicularis est ad FR, ideoque brevissima erit (117) rectarum omnium, quae ex centro O ad rectam FR duci queunt, ac proinde OC, vel OS minor quoque erit OH. Sed recta OS terminatur ad circumferentiae punctum S; ergo terminus H longioris rectae OH extra circulum cadet. Simili modo ostendam, puncta reliqua rectae FR cadere extra circulum excepto unico puncto C; ergo recta FR extra circulum tota cadit, ideoque ipsum tanget (39) in unico puncto C, Q. E. D.

COROLLARIUM I.

125. Expedite itaque duci potest tangens circuli in dato puncto C, si nempe agatur ex centro O per datum punctum C recta OCA, & ad hanc ex C erigatur (87) perpendicularis CH. Co- TAB.II. FIG. 16.

COROLLARIUM II.

TAB. I. FIG. 15. 126. E converso radius OC ad punctum contactus C ductus, est tangenti FR perpendicularis. Cum enim omnia puncta tangentis FR extra circulum cadant, excepto unico puncto C, utique OC brevissima erit rectarum omnium ex centro O ad tangentem ductarum, ideoque (118) perpendicularis erit tangenti FR, rectusque proinde angulus OCR.

COROLLARIUM III.

127. Unica ergo FR circulum tanget in puncto C. Si enim etiam recta LE circulum tangeret eodem in puncto C, angulus OCE rectus (126) foret, seu aequalis recto alteri OCR, quod (72) est absurdum.

COROLLARIUM IV.

128 Igitur si ex puncto contactus C agatur alia CE recta, quae cum tangente CR constituat angulum quantumvis tenuem RCE; ea secabit (127) circulum in puncto C, atque adeo ejusdem aliqua pars CA intra circulum ipsum cadet. Ex quo sequitur, inter tangentem CR, & arcum circuli CSA nullam aliam rectam duci posse, & angulum contactus, quem nempe arcus circuli efficit cum tangente, minorem esse quolibet rectilineo.

SCHOLION.

129. Hinc mechanici etiam colligunt, corpus grave urgeri ad centrum terrae, si haec sphaerica supponatur. Circulus QCL exponat terraqueum globum, cujus centrum O, & recta AC eam lineam repraesentet, quam libere cadendo describit grave; tangens vero FH referat horizontem. Cum experientia planè constet, rectam AC a liberè cadente gravi descriptam, perpendicularem esse ad horizontem FH, utique

TAB. II. FIG. 16.

que

que rectus erit angulus ACH. Sed cum terrestris quoque radius OC perpendicularis esse (126) debeat ad horizontem FH, rectus quoque erit angulus OCH; ergo duobus rectis aequabuntur anguli ACH, OCH, ideoque (105) in directum erunt rectae AC, CO, & grave A dirigetur ad centrum telluris O.

CAPUT III.

De Parallelarum, Tangentium, & Angulorum trianguli proprietatibus.

PROPOSITIO XIV.

130. *Si binae rectae LF, AE fuerint parallelae, & HC sit perpendicularis uni AE, perpendicularis quoque erit alteri LF.* TAB. II. FIG. 17.

Sumptis aequalibus CS, CV, excitentur (87) ad AE perpendiculares SI, VG, quae mutuo (122) aequabuntur, junganturque CI, CG. Quia latera IS, SC trianguli CIS aequantur lateribus GV, VC trianguli CGV, & rectus angulus ISC aequatur recto GVC, aequabuntur (106) quoque tùm rectae CI, CG, tùm anguli ICS, GCV, qui ablati a rectis, seu aequalibus angulis HCS, HCV, relinquent (68) residuos aequales angulos HCI, HCG. Vidimus autem etiam latera IC, CH aequalia esse lateribus GC, CH; ergo etiam (106) angulus CHI aequabitur CHG, ideoque CH perpendicularis est ad LF. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

TAB. II. FIG. 18. 131. *Si recta HE secet parallelas AQ, CS, atque ex punctis H, & E ad utramque demittantur perpendiculares HF, EO; angulus OEH aequabitur EHF.*

Fiant HL, EG duplae rectarum HF, EO, & jungantur EL, GH. Cum OE perpendicularis sit ad AQ, perpendicularis (130) quoque erit ad CS, proindeque (122) aequabuntur HF, OE, sicuti (76) & illarum duplae HL, GE. Jam vero latera EF, FL trianguli FEL aequantur lateribus EF, FH trianguli FEH, & rectus angulus EFL adaequat rectum EFH; igitur EL aequalis (106) erit EH. Simili ratiocinio etiam recta GH ostendetur aequalis ipsi EH; ergo etiam mutuo (75) aequabuntur EL, GH, ideoque cum etiam rectae HE, EG aequales sint rectis HE, HL, aequilatera erunt triangula EHG, LEH, unde (83) angulus GEH aequabitur EHL, vel OEH ipsi EHF erit aequalis. Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

TAB. II. FIG. 19. 132. *Si recta RE secet parallelas AQ, CS in punctis H, & E; erit 1.° alternus angulus AHE aequalis alterno HES; 2.° externus angulus RHQ aequabitur interno opposito HES; 3.° duo interni anguli QHE, HES duobus rectis aequales erunt.*

I. Ex punctis H, & E ad utramque parallelam demittantur perpendiculares HF, EO, quae (131) mutuo erunt aequales; ideoque duo latera EO, EH trianguli EOH aequabuntur duobus lateribus FH, HE trianguli EFH. Sed etiam angulus OEH aequa-

quatur (131) angulo EHF; ergo etiam angulus OHE aequalis (106) erit angulo HEF, sive alternus angulus AHE aequabitur alterno angulo HES.

II. Externus angulus RHQ aequatur sibi ad verticem (96) opposito AHE: sed ipsi AHE (*num.* I) aequalis est alternus angulus HES; ergo externus RHQ aequalis quoque erit interno sibi opposito HES.

III. Quia QH insistit rectae RE, duobus rectis aequabuntur (98) anguli QHE, RHQ: sed RHQ aequalis est (*num.* II) interno HES; ergo duobus rectis aequabuntur quoque interni anguli QHE, HES. Q. E. D.

COROLLARIUM.

133. Hinc in parallelogrammo AEFC quilibet angulus EAC aequatur alteri sibi opposito EFC. Nam quia diagonalis AF secat parallelas EF, AC, angulus EFA aequabitur (132) alterno FAC. Similiter cum eadem diagonalis AF secet parallelas EA, FC, angulus AFC aequatur (132) alterno EAF; igitur totus angulus EFC aequabitur toti EAC. TAB. I. FIG. 12.

PROPOSITIO XVII.

134. *Angulus ROH ad punctum contactus O inter tangentem OR, & chordam OH comprehensus, pro mensura habet dimidium arcum OZH, quem chorda OH subtendit.* TAB. II. FIG. 20.

Bisecta (110) chorda OH in L, ductoque per L radio CZ, qui perpendicularis (113) erit ad chordam OH, & bisecabit (114) arcum OH in Z, agatur CG parallela (123) ad HO. Quia CL perpendicularis est ad HO, perpendicularis (130) quoque erit ad CG; & ideo rectus erit angulus LCG.

Sed rectus quoque (126) est angulus ROC; ergo angulus ROC aequabitur LCG. Sed quia CO secat parallelas GC, OH, angulus HOC aequatur (132) alterno OCG; ergo si ab angulis aequalibus ROC, LCG auferantur aequales HOC, OCG, aequabuntur residui anguli ROH, OCL. Sed arcus OZ, sive dimidius arcus OH mensura est (89) anguli OCL; ergo mensura quoque erit anguli ROH. Q. E. D.

PROPOSITIO XVIII.

TAB. II. FIG. 21. 135. *Angulus HCF ad circumferentiam circuli constitutus, pro mensura habet dimidium arcus HF, quem intercipiunt ejus crura CH, CF.*

Per verticem anguli C ducta (125) tangente RA, agatur radius EC. Dein centro C, & radio CE describatur circulus ESPO, qui aequalis erit alteri HCF. Quia singuli arcus SL, LV, VO mensurae (89) sunt singulorum angulorum RCH, HCF, FCA, utrique arcus SLVO, seu dimidium circumferentiae circuli ESPO erit mensura illorum summae. Sed dimidium circumferentiae circuli ESPO aequatur (*ex constr*) dimidio circumferentiae circuli HCF; ergo & dimidium circumferentiae circuli HCF erit mensura trium angulorum simul RCH, HCF, FCA. Sed dimidium arcus CH est (134) mensura anguli RCH, & dimidium arcus GF est (134) mensura anguli FCA; ergo & dimidium reliqui arcus HF erit mensura reliqui anguli HCF. Q. E D.

COROLLARIUM I.

TAB. II. FIG. 22. 136. Hinc sunt aequales anguli HSE, HRE, HFE eidem arcui HE insistentes; singulorum quippe mensura est dimidius (135) arcus HE.

Co-

COROLLARIUM II.

137. Similiter si aequales sint anguli ad circumferentiam positi ASL, SLH, aequales quoque erunt arcus AL, SH, quibus insistunt, & a quorum medietatibus iidem aequales anguli (135) mensurantur. TAB. II. FIG. 23.

COROLLARIUM III.

138. Hinc duae chordae parallelae AS, LH intercipiunt arcus aequales AL, SH. Ducta enim SL, erunt (132) aequales alterni anguli ASL, SLH, atque adeo aequabuntur (137) etiam arcus AL, SH. TAB. II. FIG. 23.

COROLLARIUM IV.

139. Angulus quoque ad centrum HEF duplus erit anguli ad circumferentiam positi HCF; illius enim mensura est totus (89) arcus HF, cujus dimidium mensura est (137) anguli HCF. TAB. II. FIG. 24.

COROLLARIUM V.

140. Angulus pariter ACF a tangente CA, & secante CF comprehensus, adaequabit angulum CHF positum in segmento alterno FHC; utriusque enim mensura (134, 135) est dimidius arcus CF.

COROLLARIUM VI.

141. Liquet, etiam quadrilaterum FRHC inscriptum circulo, habere tam oppositos angulos R, C, quam F, H aequales duobus rectis. Nam dimidium arcus HCF mensura (135) est anguli R, & dimidium reliqui FRH mensura (135) est anguli C; ergo dimidium circumferentiae HCFR, nempe arcus graduum 180, mensura erit duorum simul angulorum R & C, qui proinde simul sumpti aequabuntur (92) duobus rectis. Non aliter discurrendum de reliquis oppositis angulis F & H. TAB. II. FIG. 25.

PROPOSITIO XIX.

TABUL. IX. FIG. 1. 142. *Si duae chordae BE, DC sibi occurrant in aliquo puncto A intra circulum constituto; mensura anguli BAD erit dimidium summae arcuum BD, CE.*

Ducatur EF parallela ipsi CD, eruntque (138) aequales arcus DF, CE. Cum ergo sint parallelae EF, CD, externus angulus BAD aequatur (132) interno opposito BEF. Atqui mensura anguli BEF est (135) dimidium arcus BDF, ergo, & mensura anguli BAD erit dimidium arcus BDF. Sed cum aequentur arcus DF, CE, arcus BDF aequalis est summae arcuum BD, CE; ergo & mensura anguli BAD erit dimidium summae arcuum BD, CE. Q. E. D.

PROPOSITIO XX.

TABUL. IX. FIG. 2. 143. *Si duae chordae BE, DC sibi occurrant in aliquo puncto A extra circulum constituto; mensura anguli BAD erit dimidium differentiae arcuum BD, EC.*

Ducatur EF parallela ipsi AD, eruntque (138) aequales arcus FD, EC. Cum ergo sint parallelae EF, AD, internus angulus BAD (132) aequabitur externo opposito BEF. Atqui mensura anguli BEF est (135) dimidium arcus BF; ergo & mensura anguli BAD erit dimidium arcus BF. Sed cum aequentur arcus FD, EC, est arcus BF differentia arcuum BD, EC; ergo & mensura anguli BAD erit dimidium differentiae arcuum BD, CE. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

144. *Angulus in semicirculo rectus est; in segmento majori acutus; obtusus vero in minori.* TAB.II. FIG. 22.

I. Sit semicirculus HER, in eoque angulus HER: dico hunc rectum esse. Nam quia angulus HER est in semicirculo constitutus, arcus HSR, cui insistit, erit dimidia circumferentia, sive graduum 180; unde ejus medietas, quae (135) est mensura anguli HER, erit graduum 90. Sed recti anguli mensura est quoque (92) graduum 90; igitur rectus erit angulus HER.

II. Sit deinde segmentum HERS semicirculo majus, in eoque angulus HES. Quoniam angulus HES est in segmento majori, arcus HS, cui insistit, minor erit dimidia circumferentia, seu arcu graduum 180; ergo dimidium ejusdem arcus HS, quod mensura est (135) anguli HES, minor erit gradibus 90. Sed arcus minor gradibus 90 acutum (93) angulum dimetitur; igitur acutus erit angulus HES.

III. Sit demum segmentum HEF semicirculo minus, in eoque angulus HEF. Quoniam angulus HEF est in segmento minori, arcus HSF cui insistit, major erit dimidia circumferentia, seu arcu graduum 180; ergo dimidium arcus HSF, quod (135) mensura est anguli HEF, major erit gradibus 90: Sed arcus major gradibus 90, est mensura (93) anguli obtusi; ergo obtusus erit angulus HEF.

COROLLARIUM I.

145. Quare ad punctum extremum F datae rectae RF excitabitur perpendicularis FO. Sumpto enim extra illam quolibet puncto L, & juncta LF, centro L, & radio LF describatur circulus FEO, TAB.II. FIG.26.

occurrens denuo rectae RF in E. Deinde juncta EL, eaque producta usque ad punctum O; ducatur FO, quae ob rectum (144) in semicirculo angulum OFE, perpendicularis erit ad rectam FR.

COROLLARIUM II.

TAB.II. FIG. 27. 146. Novimus quoque ex dato extra circulum puncto O, ducere contingentem. Ducta enim ex O ad centrum R circuli dati recta OR, super hanc velut diametrum fiat semicirculus RSO. Dein ad punctum S, in quo is secat datum circulum HSL, agatur OS, quae tangens quaesita erit. Ducto siquidem radio SR, rectus (144) prodibit angulus OSR, & hinc OS ad extremitatem S radio SR perpendicularis, circulum tanget (124) in puncto S.

COROLLARIUM III.

TA.III. FIG.1.2. 147. Si duo circuli CAE, CFH intus, vel extra se tangant in puncto C; recta per centra eorum ducta, per punctum contactus transire debet. Nam si fieri potest, recta AE ducta per eorum centra, transeat extra punctum contactus C, junganturque CA, CE, CF, CH. Quia AE per utriusque circuli centrum (*ex hyp*) transit, semicirculi erunt ACE, FCH, ideoque (144) recti, aequalesque erunt anguli ACE, FCH, quod (72, 102) est absurdum; namque in figura prima esset pars toti aequalis, & in secunda duobus rectis major esset angulus ACH.

COROLLARIUM IV.

TABUL. III. FIG.3.4. 148. Quin circuli intus, vel extra se tangentes, in uno se puncto tangunt. Tangant enim se se in punctis S, & A, sitque EF recta per centra illorum ducta, quae transibit (147) per contactum A. Quia AF, AE sunt diametri circulorum, punctumque S utrique circulo (*ex hyp*) est commune, recti (144)
seu

ſeu aequales erunt in ſemicirculo anguli ASF ASE, quod (72, 102) eſt abſurdum; namque in figura tertia eſſet pars toti aequalis, & in figura quarta duobus rectis aequaretur angulus FSE.

PROPOSITIO XXII.

149. *Si recta OE ita ſecet rectas AV, ZF, ut vel alternus angulus ARE æqualis ſit alterno REF; vel externus ORV æquetur interno oppoſito REF; vel demum duo interni VRE, REF duobus rectis æquentur: parallelæ erunt AV, ZF.* TABUL. III. FIG. 5.

I. Super RE tamquam diametrum deſcripto circulo ELRC, qui ſecet rectas AV, ZF in punctis L, & C, jungantur LE, RC. Quia aequantur alterni (*ex hyp*) anguli ARE, REF, aequales quoque erunt (137) arcus LE, RC, quibus ſi addatur arcus LR, erit arcus ELR aequalis arcui LRC. Sed cum arcus ELR ſit dimidia (*ex conſtr*) circumferentia, eſſe debet graduum 180; ergo graduum 180 erit etiam arcus LRC, quare eidem inſiſtens angulus LEC, erit (135) graduum 90, ſeu rectus. Sed rectus quoque eſt in ſemicirculo (144) angulus RCE; ergo rectae RC, LE perpendiculares ſunt ad rectam ZF. Sunt vero etiam (107) aequales, ob nempe aequales arcus RC, LE; ergo (123) parallelae erunt AV, ZF.

II. Angulus ARE aequalis eſt (96) alteri ORV: ſed etiam internus REF aequatur (*ex hyp*) externo ORV: ergo etiam angulus ARE aequabitur REF, ideoque parallelae (*num.* I) erunt AV, ZF.

III. Anguli ORV, VRE duobus (98) rectis aequantur; ſed duobus etiam rectis aequantur (*ex hyp*) anguli VRE, REF; ergo anguli ORV, VRE aequales ſunt angulis VRE, REF, & utrinque ablato angulo VRE,

VRE, reliquus ORV aequabitur REF, quare parallelae erunt (*num.* II.) AV, ZF. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

TAB. I. FIG. 12. 150. Ergo quodvis rectangulum AEFC est etiam parallelogrammum. Cum enim (*ex hyp*) sint recti duo interni anguli E, EAC, utique horum summa aequabitur duobus rectis, & ideo (149) parallelae erunt EF, AC. Simili modo ostendam, parallelas quoque esse EA, FC; ergo rectangulum AEFC, est (49) etiam parallelogrammum.

COROLLARIUM II.

TAB. I. FIG. 12. 151. Hinc rectae AE, CF, quae jungunt aequales, & parallelas EF, AC, ipsae erunt quoque aequales, & parallelae. Nam cum sint (*ex hyp*) parallelae EF, AC, alternus angulus EFA aequabitur (132) alterno alteri CAF: sed etiam duo latera EF, FA trianguli AEF aequalia sunt (*ex hyp*) duobus lateribus CA, AF trianguli ACF; ergo etiam AE (106) aequabitur ipsi CF, & angulus EAF sibi alterno angulo CFA, ideoque rectae AE, CF erunt aequales, & (149) parallelae.

COROLLARIUM III.

TAB. I. FIG. 14. 152. Unde si concipiatur aliqua recta AC super aliam AE ita ferri, ut sibi ipsi semper maneat parallela, facile apparet, quod ea perventa ad situm EF, descripsit parallelogrammum AEFC. Cum enim AC, EF sint (*ex hyp*) aequales, & parallelae, etiam illas jungentes AE, CF erunt (151) aequales, & parallelae, ideoque figura AEFC, quam recta AC descripsit, est (49) parallelogrammum.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

153. *Si duae rectae HF, LA sint parallelae ad tertiam OC; erunt etiam mutuo parallelae* Tabul. III. Fig. 6.

Rectas HF, LA, OC secet transversa SR. Cum igitur recta SR secet (*ex hyp*) parallelas HF, OC, externus angulus SVF aequalis erit (132) interno opposito SRC. Verum ob parallelas LA, OC (*ex hyp*) etiam externus angulus SEA aequatur (132) interno opposito SRC; igitur angulus SVF aequabitur SEA, & propterea parallelae (149) erunt quoque HF, LA. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

154. *Si recta HA incidens in rectas CR, AE, faciat angulos internos RCA, CAE duobus rectis minores; rectae CR, AE concurrent versus eam partem, quam spectant anguli duobus rectis minores.* Tabul. III. Fig. 7.

Quoniam anguli RCA, CAE supponuntur minores duobus rectis, fiat ad punctum A angulus CAZ talis, ut cum angulo RCA sit aequalis duobus rectis, eruntque CR, AZ mutuo (149) parallelae. Dein assumo velut axioma per se notum, inter duas rectas AE, AZ in infinitum productas, duci posse aliquam rectam ad AH parallelam, puta LV, quae major sit quam AC. Denique sumpta AF ipsi LV aequali, jungatur FV, Quia AF (*ex constr*) est aequalis, & parallela ipsi LV, etiam FV aequalis erit, & (151) parallela ipsi AL: vidimus autem CR quoque esse parallelam ipsi AL; ergo etiam FV parallela (153) erit ad CR. Itaque est CR & parallela ad FV, & inclusa triangulo AFV, unde cum in infinitum produ-

du-

duci queat, necessario occurret ipsi AE in O; nam si ita non esset, eadem CR producta, vel evaderet per sibi parallelam FV, quod (28) est absurdum, vel denuo secaret rectam CA, quod (15) impossibile prorsus est. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

155. Hinc duae rectae non parallelae CR, AE necessario convenient inter se. Nam ducta HA, quae illas secet in C, & A, si ad eam partem, ubi ad se se convergunt rectae CR, AE, ducatur ex puncto A recta AZ parallela ipsi CR; duo anguli RCA, CAZ aequales erunt (132) duobus rectis, ideoque anguli RCA, CAE duobus rectis minores erunt, ac proinde (154) concurrent rectae CR, AE.

COROLLARIUM II.

TABUL. III. FIG. 8.

156. Si pariter duae rectae AE, HE convenientes in E, secentur utcunque in F, & L, ac ad easdem ex hisce punctis excitentur (87) perpendiculares FC, LS; hae productae necessario concurrent ad punctum O. Nam juncta FL, cum (*ex hyp*) rectus sit angulus EFC, minor recto erit angulus LFC. Eandem ob causam minor recto erit quoque angulus FLS; igitur FL incidens in rectas FC, LS, facit angulos internos LFC, FLS minores duobus rectis, ideoque rectae FC, LS necessario (154) sibi occurrent ad punctum O.

PROPOSITIO XXV.

TABUL. III. FIG. 9.

157. C*entrum invenire cujusvis dati circuli AEH.*

Sumptis in circumferentia tribus punctis quibuslibet A, E, H, agantur chordae EA, EH, ad quas bi-

bisectas (110) in F & L, excitentur (87) perpendiculares FO, LO, mutuo convenientes (156) ad punctum O: dico, hoc esse quaesitum centrum. Agantur enim OA, OE, OH. Quia latera AF, FO trianguli AOF aequantur (*ex constr*) lateribus EF, FO trianguli EOF, & rectus angulus AFO aequalis est recto alteri EFO, etiam OA aequabitur (106) ipsi OE. Eadem ratione etiam OH aequabitur rectae OE; ergo tres rectae OA, OE, OH mutuo sunt aequales, & propterea punctum O erit (80) quaesitum centrum propositi circuli AEH. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

158. Hinc sumptis in circulari arcu tribus punctis, centrum (157) inveniri, datusque circulus perfici potest.

COROLLARIUM II.

159. Per tria itaque data puncta quaelibet A, E, H non posita in directum, circulus describetur. Jungantur enim haec puncta duabus rectis EA, EH, ad quas bisectas in F, & L, erigantur perpendiculares FO, LO, mutuo convenientes ad punctum O. Hoc posito, si jungantur OA, OE, OH, hae invicem (157) aequabuntur, & ideo circulus centro O, & radio OA descriptus, transibit quoque per E, & H.

COROLLARIUM III.

160. Quia circulum describere per tria data puncta A, E, H perinde est ac circumscribere circulum triangulo AEH; patet modus circulum dato triangulo circumscribendi.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

TABUL. III. FIG. 10.

161. *Omnes trianguli RAC tres anguli simul sumpti aequantur duobus rectis.*

Triangulo RAC circumscribatur (160) circulus RAC. Quia dimidius arcus CR (135) metitur angulum A, dimidius autem arcus RA mensura est anguli C, nec non dimidius arcus AC metitur angulum R; liquet dimidium totius circumferentiae RAC, nempe arcum graduum 180, metiri tres simul angulos A, C, R. Sed arcus graduum 180 duos (92) quoque rectos metitur; ergo duobus rectis aequantur tres simul anguli A, C, R. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

162. Hinc tres anguli simul sumpti unius trianguli aequantur tribus angulis simul sumptis trianguli alterius.

COROLLARIUM II.

163. Si ergo duo anguli unius trianguli duobus trianguli alterius sint aequales; etiam tertius unius tertio alterius aequalis erit.

COROLLARIUM III.

164. Et si unius trianguli duo anguli innotescant; etiam tertius notus erit.

COROLLARIUM IV.

165. Pariter si in triangulo unus angulus rectus sit, vel obtusus; reliqui duo acuti erunt.

COROLLARIUM V.

166. Et si in triangulo unus angulus rectus sit; duo reliqui simul aequantur recto. Co-

COROLLARIUM VI.

167. Pronum quoque ex dictis est inscribere circulo triangulum ARC, aequiangulum dato alteri ESO. Ducta (125) enim tangente FI, fiat angulus IRC aequalis (88) angulo E, & angulus FRA aequalis alteri O, & jungatur AC: dico triangulum ARC aequiangulum esse dato ESO. Quippe angulus A aequatur (140) angulo IRC; sed etiam angulus E eidem IRC est (*ex constr*) aequalis; ergo angulus A aequatur etiam angulo E. Pari modo ostendam angulum quoque C esse angulo O aequalem; ergo etiam tertius ARC aequabitur (163) tertio S. TABUL. III. FIG. 11. 12.

SCHOLION I.

168. Ex hujus propositionis corollario tertio intulit Keplerus dimensionem Telluris. Sint B, & C duorum montium vertices satis dissiti inter se, sitque LH arcus Telluris interceptus inter utriusque montis radices, quem diligenter metiri oportet. Deinde notentur anguli CBA, BCA, quos efficit pendulum per rectas BA, CA ad centrum telluris constanter vergens, & linea visualis BC. Summa horum angulorum auferatur ex gradibus 180, ut notus fiat (164) angulus BAC, prodeatque arcus interceptus (89) LH in gradibus & minutis; cumque ejus dimensio per notas quoque mensuras fuerit (*ex hyp*) deprehensa, ad easdem quoque licebit totius terrestris ambitus dimensionem revocare. Ut autem haec facilius a Tyronibus percipiantur, exemplum a Keplero ipso allatum referre libet. Esto B vertex montis, C vero arcis, distent autem haec loca milliaribus quinque Germanicis communibus. Inventus sit autem angulus CBA grad. 89 min. 46, alter vero BCA grad. 89 min. 55. Igitur min. 19 erit (164) TABUL. III. FIG. 13.

an-

angulus BAC, seu interceptus arcus LH. Si ergo arcus terrestris LH minutorum 19 est 5 milliarium germanicorum, utique totus telluris ambitus, qui 21600 minutis constat, 5684 milliaria germanica continebit.

SCHOLION II.

169. Eadem methodo etiam Ricciolius usus est in turri campanaria Mutinensi, & in vertice montis Paterni, qui Bononia non longe abest, intulitque telluris gradum continere Bononienses passus 64363 ac totum proinde telluris ambitum constare passibus 23170680, hoc est milliariis Bononiensibus 23170, ac praeterea passus 680. Sed multo accuratius mensuram terrae quaesiverunt Astronomi recentiores, ex quibus constat a polo ad aequatorem gradus minui, & vicissim. Ad usus tamen praesentes, ubi tellus pro sphaerica haberi potest, retinebimus cum Cassino mensuram, quam dat Piccardus, atque adeo tribuemus singulis terrae gradibus Parisinos passus 68472, hoc est est milliaria Parisiensia 68, ac praeterea passus 472. Unde totus telluris ambitus continebit passus 24649920, hoc est milliaria Parisiensia 24649, & praeterea passus 920.

PROPOSITIO XXVII.

TABUL. III. FIG. 14.

170. *Si in quovis triangulo ACF producatur latus unum AF in H; externus angulus CFH aequabitur duobus simul internis oppositis A, & C.*

Quia CF insistit rectae AH, duo anguli CFH, CFA aequantur duobus (98) rectis: sed duobus rectis aequantur quoque tres (161) anguli A, C, CFA; ergo duo anguli CFH, CFA aequantur tribus angulis

gulis A, C, CFA, & utrinque ablato angulo CFA, reliquus CFH aequabitur duobus simul angulis A, & C. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

171. Ergo externus angulus CFH major erit interno quolibet A, vel C.

COROLLARIUM II.

172. Hinc si in triangulo EAH rectus sit angulus AEH, circulus super diametro AH descriptus, transibit per punctum E. Transeat enim, si fieri potest, per punctum F positum ultra E, & jungatur HF. Igitur rectus (144) erit in semicirculo angulus AFH, vel EFH: sed rectus quoque ponitur angulus AEH; ergo externus angulus AEH aequabitur interno EFH; quod (171) est absurdum. Pari modo ostendetur, circulum transire non posse per aliud punctum R positum citra E; ergo transibit per punctum E. TAB. III. FIG. 15.

SCHOLION.

173. Ex hac propositione solent Astronomi parallaxim siderum definire. Sit enim AB quadrans circuli in telluris superficie maximi, cujus centrum T; A locus in superficie, cujus Zenit est punctum Z; circulus denique ZER referat coelum stellatum. Esto Luna in L, quae observata a centro telluris T conspicietur in puncto S, quod Lunae dicitur *locus verus*: at si e telluris superficie in A observator Lunam intueatur, illam conspiciet in puncto E, quod Lunae dicitur *locus visus*; & arcus SE, qui differentia est inter locum verum, & visum, Lunae dicitur *parallaxis*, haecque ab Astronomis sequenti methodo invenitur. Trianguli ALT externus angu- TAB. III. FIG. 16.

lus ZAL aequalis est duobus (170) internis ATL. ALT, ideoque si ex angulo ZAL observatione noto, auferatur angulus ATL computatione itidem notus, prodibit angulus ALT, vel huic aequalis (96) SLE. Jam vero cum puncta L, & T respectu immensae distantiae coeli coincidant, idem erit arcus SE, sive ejus centrum concipiatur esse in L, sive in T, ideoque arcus SE mensura (89) erit anguli SLT; ergo cum supra inventus sit angulus SLE, notus quoque erit arcus SE, qui parallaxis est Lunae.

PROPOSITIO XXVIII.

TAB. III. FIG. 17. 18. 174. *Si triangula AFC, SOH praeter singulos angulos A, & C aequales singulis S, & H, aequalia quoque habuerint latera AC, SH aequalibus angulis intercepta; etiam latera AF, SO, itemque CF, HO, & ipsa triangula aequabuntur.*

Sunto, si fieri potest, inaequalia latera AF, SO, atque ex majori AF sumpta AR aequalis SO, jungatur CR. Quia latera CA, AR trianguli ARC aequantur (*ex hyp*) lateribus HS, SO trianguli SOH, & angulus A aequatur (*ex hyp*) angulo S, etiam (106) angulus ARC aequabitur ipsi O. Sed quia in triangulis AFC, SOH duo anguli A, & C aequales sunt duobus S, & H, etiam tertius F tertio O est (163) aequalis; ergo angulus ARC (qui externus est trianguli RFC) aequabitur interno F, quod (171) est absurdum. Aequantur ergo latera AF, SO. Simili modo ostendam, aequalia esse etiam latera CF, HO; ergo cum (*ex hyp*) aequentur quoque reliqua latera AC, SH, [illegible] (83) triangula AFC, SHO aequalia mut Q. E. D.

Go-

COROLLARIUM I.

175. Si triangula AFC, SOH praeter angulos A, & C aequales singulis S, & H, aequalia quoque habeant latera FC, OH opposita aequalibus angulis A, & S; reliqua quoque aequalia habebunt. Nam ob duos angulos A, & C aequales duobus S, & H, reliquus etiam F aequalis erit reliquo O (163); ergo triangula AFC, SOH praeter angulos C, & F aequales singulis H, & O, aequalia quoque [*ex hyp*] habebunt latera CF, HO angulis aequalibus intercepta; unde etiam (174) reliqua latera, & ipsa triangula aequalia erunt.

COROLLARIUM II.

176. Parallelogrammum AEFC latera opposita aequalia habet, & secatur a diagonali AF in duas aequales partes. Quippe ostensum fuit (135) singulos angulos EFA, EAF trianguli AEF aequales esse singulis FAC, AFC trianguli ACF; ergo cum latus AF angulis aequalibus interceptum, utrique triangulo sit commune, liquet AE aequalem (174) fore CF, nec non EF aequari AC, & triangulum AEF aequale esse alteri ACF. TAB. I. FIG. 12.

COROLLARIUM III.

177. Cum rectangulum sit quoque (150) parallelogrammum, sequitur rectangulum latera opposita aequalia habere, atque a diagonali secari in duas aequales partes.

COROLLARIUM IV.

178. Hinc si per quodlibet punctum F diagonalis parallelogrammi SOAC traiiciantur rectae EV, RG parallelae ad rectas OA, AC; parallelogrammum ORFE aequale erit alteri FVCG. Nam triangulum TAB. III. FIG. 19.

SOA aequale (176) eſt triangulo SCA, & triangulum SEF aequatur (176) triangulo SGF, nec non triangulum FRA adaequat(176) aliud FVA; ergo reſiduum ORFE (68) aequabitur reſiduo FVCG.

SCHOLION I.

TAB. III. FIG. 20. 179. Hinc Geodaetae aream agri parallelogrammi in duas aequales partes facilius dividunt. Sit enim CABD ager parallelogrammus, AD ejus diagonalis, cujus punctum medium ſit F: dico, quamlibet rectam, ut EG, traductam per punctum F, dividere agrum in duas aequales partes CAEG, GEBD. Nam ob parallelas AB, CD, alternus angulus EAF aequatur (132) alterno alteri FDG: ſed angulus AFE aequatur (96) ſibi ad verticem oppoſito GFD; igitur cum (*ex hyp*) aequentur etiam AF, FD angulis aequalibus interceptae, triangulum AFE aequabitur (174) GFD, unde addito hinc inde trapezio CAFG; trapezium CAEG aequabitur triangulo CAD, ſeu dimidio (176) parallelogrammo CABD, ac proinde etiam trapezio GEBD,

SCHOLION II.

TAB. IX. FIG. 3. 180. Iidem pariter Geodaetae determinant pileo inacceſſam diſtantiam AE. Nam producta, ut libet, EA in S, ponitur obſervator ad punctum A, ubi ſtat ſitu erecto, & perpendiculari ad horizontem, adeo ut oculo manente in B, rectus ſit angulus BAE. Deinde pileum tamdiu deprimit, donec radius viſualis BE extremitatem illius radens, occurrat alteri extremo E inacceſſae diſtantiae AE. Idem denique obſervator eadem pilei inclinatione manente, vertit ſe verſus S, notatoque puncto F, ubi ſcilicet radius viſualis BF rectae AS occurrit, metitur rectam AF, quae erit

rit aequalis distantiae quaesitae AE. Nam in triangulis BAE, BAF radii visuales BE, BF aequales (*ex constr*) faciunt angulos cum BA: sed etiam recti, seu aequales sunt anguli BAE, BAF; ergo cum latus BA utrique triangulo sit commune, latus quoque AE aequabitur (174) ipsi AF, ideoque si recta AF per mensuram aliquam nota fiat, determinabitur quoque inaccessa distantia AE,

PROPOSITIO XXIX.

171. *In omni triangulo RAC si latus AC sit majus latere AR; etiam angulus R priori oppositus, major erit angulo C, qui opponitur posteriori. Et e converso, si angulus R major sit angulo C; etiam latus AC majus erit latere AR.* TAB. III. FIG. 10.

I. Triangulo RAC circumscribatur (160) circulus RCA. Quia latus AC est majus latere AR, etiam arcus AC major erit (109) arcu AR; unde etiam angulus R major (135) erit angulo C.

II. Cum angulus R sit major angulo C, etiam arcus AC major (135) erit arcu AR, ideoque etiam chorda AC major (105) erit chorda AR. Igitur latus quoque AC majus erit latere AR. Q. E. D.

POROPSITIO XXX.

182. *Si in triangulo RAC latus AC alteri AR sit aequale; etiam angulus R priori oppositus, aequalis erit angulo C, qui opponitur posteriori. Et vicissim si angulus R alteri C sit aequalis; etiam latus AC alteri AR erit aequale.* TAB. III. FIG. 21.

I. Triangulo RAC circumscribatur circulus RCA. Quia latus AC est (*ex hyp*) aequale AR, arcus quoque AC adaequabit alium (82) arcum AR,

 ideo-

ideoque angulus R aequabitur (135) ipsi C.

II. Quia angulus R ipsi C est (*ex hyp*) aequalis utique arcus AC adaequabit (137) arcum AR; ideoque etiam latus AC erit alteri AR (107) aequale. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

TAB. III. FIG. 22. 183. Igitur si in triangulo isoscele ABC angulus A aequis cruribus contentus sit rectus; semirecti erunt reliqui B, & C. Cum enim rectus sit angulus A, recto aequales (166) erunt duo simul reliqui B, & C: sed ob aequalia latera AB, AC, aequales quoque (182) sunt anguli B, & C; ergo erunt hi duo anguli semirecti.

COROLLARIUM II.

184. Cum in quovis triangulo aequalibus lateribus aequales semper (182) anguli opponantur; liquet omnes angulos trianguli aequilateri esse aequales. Igitur quilibet angulus trianguli aequilateri est (161) pars tertia duorum rectorum, seu graduum 60.

COROLLARIUM III.

TAB. III. FIG. 23. 185. Hinc habetur trisectio recti anguli ABC, si supra BC fiat triangulum aequilaterum BEC. Nam cum rectus angulus ABC sit graduum 90, alter vero EBC sit (184) graduum 60; patet, reliquum ABE fore graduum 30, seu tertiam partem recti anguli ABC. Caeterum trisectio alterius anguli praeter rectum, hactenus a Geometris frustra quaesita est per circinum, atque regulam.

COROLLARIUM IV.

186. Quoniam in quovis triangulo aequalibus angulis semper aequalia latera (182) opponuntur; liquet, latera omnia trianguli aequianguli aequalia esse. Igitur triangulum aequiangulum, erit etiam aequilaterum.

Co-

COROLLARIUM V.

187. Hinc latus AF hexagoni regularis AFVSCQ circulo inſcripti, aequale eſt radio AO. Cum enim arcus AF ſit circumferentiae pars (*ex hyp*) ſexta, ſeu graduum 60, utique graduum 60 erit quoque (89) angulus FOA. Hic autem ſimul cum reliquis OFA, OAF eſt (161) graduum 180; ergo duo ſimul anguli OFA, OAF erunt graduum 120. Sed cum OF ſit ipſi OA aequalis, angulus OFA aequari debet (182) alteri OAF; ergo uterque erit graduum 60, ideoque aequiangulum, ac proinde (186) aequilaterum erit triangulum FOA. Igitur hexagoni latus AF aequabitur radio OA. TAB. III. FIG. 24.

SCHOLION.

188. Hinc eruitur ratio omnium expeditiſſima Turrium, aliorumque Aedificiorum altitudines menſurandi. Eſto inveſtiganda altitudo turris BA. Baculus DE tantae longitudinis capiatur, ut perpendiculariter terrae infixus, aequet oculi altitudinem. Deinde in recta horizontali AL eum locum eligat obſervator, ut dum humi proſtratus eſt, habetque ad pedum calces baculum DE perpendiculariter terrae infixum, puncta B, & E ſint cum oculo C in eadem recta linea CEB. Menſuretur denique recta AC, qua nempe oculus a turre diſtat: dico, altitudinem AB turris eſſe ipſi AC aequalem. Nam in triangulo EDC ob aequales (*ex hyp*) rectas DE, DC, & rectum angulum EDC, utique ſemirectus (183) erit angulus DCE. Verum angulus DCE idem eſt (19) cum angulo ACB; ergo in triangulo BAC ſemirectus erit angulus ACB. Eſt autem rectus angulus BAC; ergo (166) ſemirectus quoque erit reliquus ABC. Angulus itaque ACB aequabitur ABC, TAB. III. FIG. 22.

 atque

atque adeo recta AC, qua oculus nempe a turre distat, aequalis (182) erit rectae AB, quae illius altitudinem repraesentat.

PROPOSITIO XXXI.

TAB. III. FIG. 21. 189. *Si ab angulo verticali A trianguli isoscelis RAC ducatur ad basim RC perpendicularis AH; haec bifariam secabit basim in H.*

Cum latus AR alteri AC sit (*ex hyp*) aequale, etiam angulus ARH aequabitur (182) angulo ACH. Igitur in triangulis RAH, CAH, anguli ARH, AHR aequales (*ex hyp*) sunt angulis ACH, AHC; unde cum latera quoque AR, AC aequalibus angulis opposita, sint aequalia; etiam latus RH alteri CH erit (175) aequale. Q. E. D.

COROLLARIUM.

TAB. II. FIG. 9. 190. Hinc si in circulo FAE demittatur ex centro C ad chordam AE perpendicularis CG; haec bifariam secabit eamdem chordam in G. Ductis quippe radiis AC, EC, fiet triangulum isoscele ACE, cujus vertex est centrum C, basis vero AE; ergo perpendicularis CG bisecabit (189) chordam AE.

CA-

CAPUT IV.

De planometria, seu figurarum planarum dimensione.

PROPOSITIO XXXII.

191. *Super datam rectam CH construere quadratum CALH.* TAB. III. FIG. 25.

Erecta ex C perpendiculari CA, quae datae CH sit aequalis, ad rectas CH, CA ducantur parallelae AI, HI convenientes in I: dico, quadrilaterum CAIH esse quadratum. Cum enim CA, HI, itemque AI, CH sint inter se (*ex constr*) parallelae, parallelogrammum (48) erit CAIH, ideoque (176) AI aequalis erit CH: sed ipsi CH aequatur (*ex constr*) quoque CA, vel (176) HI; ergo parallelogrammum CAIH aequilaterum etiam erit. Porro ob parallelas AC, IH, anguli C, & H duobus (132) rectis aequantur; ergo cum rectus sit angulus C, rectus quoque erit angulus alter H, rectique proinde erunt etiam anguli illis (133) oppositi I, & A. Itaque quadrilaterum CAIH aequilaterum, & rectangulum erit, & proinde (46) quadratum. Q. E. F.

COROLLARIUM.

192. Hinc novimus dato circulo circumscribere quadratum RCLH. Ductis quippe diametris AO, ES perpendiculariter se secantibus in circuli centro F, supra radios EF, FS construantur (191) quadrata quatuor FC, FL, FR, FH. Quia duobus (*ex constr*) rectis aequantur anguli CAF, LAF, utique in directum (103) jacebunt CA, AL, hoc est recta erit TAB. I. FIG. 16.

linea

linea CAL. Eodem modo constabit lineas LSH, HOR, REC rectas esse; ergo quadrilatera est figura RCLH, quae propter rectos (*ex constr*) angulos C, L, H, R, rectangula quoque erit. Jam vero CR, LH diametro AO sunt (*ex constr*) aequales, sicuti etiam CL, RH aequantur diametro ES, ergo cum diametri AO, ES sint aequales, aequabuntur quoque CR, RH, HL, LC, ideoque (46) quadratum erit RCLH, cujus latera cum perpendiculariter (*ex constr*) insistant radiis EF, AF, SF, OF, utique tangent (124) circulum in punctis E, A, S, O, & proinde quadratum erit circulo circumscriptum.

PROPOSITIO XXXIII.

TAB. III. FIG. 26. 27. 193. *Area rectanguli CAIH aequalis est facto ex ejusdem basi CH in altitudinem CA ducta.*

FIG. 26. I. Esto altitudo CA commensurabilis basi CH, & pes unus sit mensura utriusque. Contineat altitudo CA tres pedes CS, SF, FA, basis vero duos CR, RH. Iam vero si ex R agatur ad CA parallela RV, atque ex S, & F ducantur ad CH parallelae SO, FL, totum rectangulum CAIH in pedes (191) quadratos divisum erit. Horum autem pedum quadratorum series AL, FO, SH sunt tres, quot nempe sunt in altitudine CA pedes, & in quavis serie sunt pedes quadrati duo, quot nempe sunt pedes in basi CH; ergo in rectangulo CAIH sex pedes quadrati erunt, quot nempe emergunt ex ductu binarii in ternarium, hoc est ex basi CH in altitudinem CA ducta. Igitur area rectanguli CAIH aequalis est facto ex basi CH in altitudinem CA ducta.

FIG. 27. II. Esto altitudo CA incommensurabilis basi CH; dico, aream rectanguli CAIH esse aequalem facto ex basi CH in altitudinem CA ducta. Sit enim, si

si fieri potest, par facto ex basi CH ducta in aliam CO rectam, quae minor sit CA. Hoc posito, per (111) continuam bisectionem basis CH deveniatur ad illius aliquam partem CR ipsa AO minorem, quae ablata quoties potest ab altitudine CA, relinquet AL minorem CR, compleaturque rectangulum CLVH, cujus altitudo CL commensurabilis erit basi CH; habebit enim cum ista communem mensuram CR. Jam vero cum AL minor (*ex constr*) sit CR, haec autem (*ex constr*) minor AO, erit AL multo minor AO, unde inter A, & O jacebit punctum L, & recta CL major erit CO; ergo factum ex basi CH in altitudinem CL majus erit facto ex eadem basi CH in altitudinem CO. Sed area rectanguli CLVH aequatur (*num. I.*) facto ex basi CH in altitudinem CL, & area rectanguli CAIH aequalis est (*ex hyp*) facto ex basi CH altitudinem CO; ergo area CLVH major erit area CAIH, quod est (72) absurdum. Non ergo area CAIH aequatur facto ex basi CH ducta in rectam CO, quae minor sit CA. Simili modo ostendam, eandem aream non esse aequalem facto ex basi CH ducta in aliam rectam, quae major sit CA; ergo aequabitur facto ex basi CH in altitudinem CA ducta. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

194. Cum quadratum CAIH sit etiam rectangulum, ejus quoque area par facto erit ex basi CH in altitudinem CA, seu ob (46) aequales CH, CA, aequabitur facto ex latere CH in se ipsum ducto. Unde si latus CH sit trium pedum, vel 3, area quadrati CAIH erit novem pedum, quadratorum, vel 9. TAB. III. FIG. 25.

SCHO-

SCHOLION.

195. Sicuti factum ex aliquo numero in se ipsum ducto, vocatur ejus *quadratum*, ita numerus ille qui ducitur in se ipsum, vocatur *radix quadrata* numeri qui producitur. Sic quia 3 in se ipsum ductus producit 9, erit 9 quadratum numeri 3, & e converso 3 erit radix quadrata numeri 9. Ex data ergo radice, ejus quadratum semper invenietur, at non vicissim ex dato numero, semper detegitur ejus radix; quandoquidem non omnis numeri dati radix quadrata extrahi potest. Ita radix 1 est 1, & radix 4 est 2; at radix 2 non potest detegi accurate, cum nullus sit numerus sive integer, sive fractus, qui in se ipsum ductus efficiat 2.

PROPOSITIO XXXIV.

TAB. IV. FIG. 1. 2. 196. *Area cujusvis trianguli FAH aequalis est facto ex dimidia basi FH in altitudinem AO ducta.*

Compleantur rectangula OASF, OAEH. Triangulum OAH dimidium est (177) rectanguli OAEH, sicuti & triangulum OAF dimidium est rectanguli OASF; ergo triangulum FAH dimidium est rectanguli FSEH. Sed hujus area aequalis (193) est facto ex basi FH in altitudinem SF, vel AO; ergo etiam area trianguli FAH aequabitur facto ex dimidia basi FH in altitudinem AO ducta. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

TAB. IV. FIG. 3. 197. Hinc triangula ABD, AED super eadem basi AD, vel aequali constituta, & habentia aequales altitudines BG, EF, sunt aequalia. Nam factum

ex

ex dimidia basi AD in altitudinem BG aequari debet facto ex dimidia eadem basi AD in altitudinem EF, ideoque etiam triangulum ABD alteri AED erit (196) aequale.

COROLLARIUM II.

198. Igitur triangula ABD, AED super eadem basi AD, vel aequali, & inter easdem parallelas BE, AD constituta, aequari debent. Nam ob parallelas BE, AD, aequale (122) quoque esse debent triangulorum altitudines BG, EF, & proinde etiam triangula (197) aequabuntur.

COROLLARIUM III.

199. Et contra, triangula aequalia, ABD, AED super eadem basi AD, vel aequali constituta, sunt quoque inter easdem parallelas BE, AD. Cum enim triangulum ABD alteri AED sit (*ex hyp*) aequale, factum ex dimidia basi AD in altitudinem BG aequari debet (196) facto ex dimidia eadem basi AD in altitudinem EF. Ergo altitudo BG alteri EF erit aequalis, rectaeque proinde BE, AD erunt (123) mutuo parallelae. TAB. IV. FIG. 3.

SCHOLION.

200. Hinc Geodaetae agri triangularis aream bifariam partiri norunt. Basis BC triangularis agri cujuslibet BAC bisecetur (110) in puncto D: dico, illum bifariam quoque dividi a recta AD jungente puncta A, & D. Triangula enim BAD DAC, quae bases habent aequales BD, DC, & altitudinem communem AG, aequalia (197) mutuo esse debent. TAB. IV. FIG. 4.

PRO-

PROPOSITIO XXXV.

Tab. IV. Fig. 5. 201. *Area cujusvis parallelogrammi FARH aequalis est facto ex basi FH in altitudinem AO ducta.*

Ducatur diagonalis AH. Area trianguli FAH dimidia (176) est areae parallelogrammi FARH: sed area trianguli FAH aequalis (196) est facto ex dimidia basi FH in altitudinem AO; ergo area parallelogrammi FARH aequabitur facto ex tota basi FH in altitudinem AO ducta, Q. E. D.

Corollarium I.

202. Igitur parallelogramma ABCD, DCFG super aequales bases AD, DG constituta, & habentia aequales altitudines BE, CH, aequalia mutuo erunt. Est enim factum ex AD in BE par facto (*ex hyp*) ex DG in CH, ideoque parallelogrammum ABCD alteri DCFG erit (201) aequale. Tab. IV. Fig. 6.

Corollarium II.

203. Similiter parallelogramma ABCD, DCFG super aequales bases AD, DG, & inter easdem parallelas BF, AG constituta, aequari debent. Nam ob parallelas BF, AG, parallelogramma aequales (122) habere debent altitudines BE, CH; quare cum aequales etiam habeant bases, eadem parallelogramma aequalia (202) erunt.

Corollarium III.

Tab. IV. Fig. 7. 204. Demum si basis FH trianguli FAH dupla sit baseos FS parallelogrammi aeque alti FALS; triangulum parallelogrammo aequale erit. Hujus enim area aequalis est facto ex basi FS in (201) altitudinem AO; area autem trianguli aequalis est facto ex dimi-

dimidia basi FH, seu ex FS in (196) altitudinem eandem AO. Ergo triangulum parallelogrammo erit aequale.

PROPOSITIO XXXVI.

205. *Area quadrilateri AESC habentis opposita latera ES, AC mutuo parallela, aequalis est facto ex dimidia horum laterum summa in rectam EB, a puncto E ad unum latus AC perpendiculariter ductam.* TAB. IV. FIG. 8.

Demittatur ex C ad ES perpendicularis CO, quae (130) perpendicularis quoque erit ad AC, ideoque aequalis (122) ipsi EB, & ducatur EC. Area trianguli AEC aequalis (196) est facto ex dimidia basi AC in altitudinem EB. Similiter area trianguli ECS aequatur (196) facto ex dimidia basi ES in altitudinem CO, vel EB; ergo area quadrilateri AESC aequabitur facto ex dimidia laterum parallelorum AS, ES summa in altitudinem EB ducta. Q. E. D.

SCHOLION. I.

206. Hinc Geodaetae norunt superficiem irregularem multangulam, sive perviam, sive imperviam mensurare. Esto imprimis mensuranda superficies pervia BCEQHKM. Intra illam ducatur linea, quae potest longissima BQ, ad quam si ex omnibus angulis demittantur perpendiculares CD, EF, HG, KI, ML, superficies data dividetur in triangula rectangula, & in quadrangula, quorum duo sunt latera parallela. Deinde singula (196, 205) mensurentur, & summa omnibus collecta quaesitam aream exhibebit. TAB. IV. FIG. 9.

Si vero impervia sit superficies mensuranda ABCDE, eidem circumscribatur rectangulum MIKL, cujus TAB. IV. FIG. 10.

cujus excessus supra aream, quae mensuranda est, dividatur vel in triangula, vel in quadrangula, quae bina habeant latera parallela. Deinde (193) mensuretur rectangulum, ejusque (196, 205) excessus in triangula, & quadrangula resolutus. Pedes qnadrati in excessu reperti, auferantur a pedibus quadratis, qui in rectangulo continentur, & residui imperviae superficiei aream indicabunt.

SCHOLION II.

207. Ex hactenus demonstratis patet methodus agrorum quorumcunque areas detegendi, quas nonnulli dum adductis exemplis illustrare nituntur, ob ingentem copiam numerorum obscurant potius, & intricant. Quamvis enim numeri in ipso mensionis opere sint maxime necessarii, in docendo tamen claritatis gratia juvat ab iis saepius abstinere.

PROPOSITIO XXXVII.

TAB. IV. FIG. 11. 208. *Area cujusvis polygoni circulo circumscripti AFVSC, aequalis est facto ex omnium laterum semisumma in radium inscripti circuli.*

Ductis ex centro O ad singulos polygoni angulos rectis OF, OV, OS, OC, OA. agantur ad puncta contactuum radii OL, OK, OT, OZ, OR, qui utpotè normales (126) ad polygoni latera, altitudines referent triangulorum AOF, FOV, VOS, SOC, COA. Igitur area trianguli AOF aequabitur (196) facto ex dimidio latere AF in radium OL. Similiter area trianguli FOV aequabitur facto ex dimidio latere FV in radium OK, vel OL, atque ita semper. Ergo summa omnium triangulorum AOF, FOV, VOS, SOC, COA, seu polygonum AFVSC aream

am

am habebit aequalem facto ex omnium laterum semisumma in radium OL circuli inscripti. Q. E. D.

LEMMA.

209. *Circulum inscribere dato regulari polygono AFVSQ.* TAB. IV. FIG. 12.

Duo proximi anguli A, & Q bisecentur rectis AO, QO convenientibus in O, demissaque ad AQ perpendiculari OR, hac veluti radio describatur circulus, qui inscriptus erit dato polygono AFVSQ. Nam latera QA, AO trianguli AOQ aequantur lateribus FA, AO trianguli FOA, & angulus QAO est (*ex constr*) aequalis alteri FAO; ergo etiam angulus (106) AQO aequabitur AFO. Sunt vero etiam [*ex hyp*] aequales toti AQS, AFV; igitur cum AQO dimidius sit AQS, etiam AFO dimidius erit reliqui AFV, quem proinde bisecat recta OF. Simili ratiocinio constabit, rectas OV, OS bisecare angulos FVS, VSQ. Ducantur insuper ex centro O ad latera perpendiculares OL, OK, OT, OZ. Quia triangula ORA, OLA praeter angulos R, RAO aequales [*ex constr*] angulis L, LAO, habent quoque commune latus OA oppositum aequalibus angulis R, & L; ergo habebunt etiam (175) aequales OR, OL. Pari modo aequales esse ostendentur OL, OK, OT, OZ; ergo circulus centro O per R descriptus, transibit quoque per L, K, T, Z. Cum vero facti sint recti anguli ad puncta R, L, K, T, Z, utique idem circulus tanget (124) polygoni omnia latera, ideoque eidem erit inscriptus. Q. E. F.

COROLLARIUM.

210. Hinc circulus radio OA descriptus, eidem erit polygono circumscriptus. Cum enim anguli OAF,

OFA semisses ostensi (209) sint angulorum aequalium QAF, AFV, utique etiam ipsi aequari debent, & propterea etiam aequales (181) erunt OA, OF, Pari modo ipsi OF ostendentur aequales OV, OS. OQ; igitur circulus radio OA descriptus, transibit per omnes polygoni angulos, & proinde erit polygono circumscriptus.

PROPOSITIO XXXVIII.

TAB. IV. FIG. 12. 211. *Si cujusvis regularis polygoni AFVSQ duo proximi anguli A, & Q bisecentur rectis AO, QO convenientibus in O, atque ex O ad latus unum AQ demittatur perpendicularis OR; polygoni ejusdem area aequabitur facto ex laterum semisumma in eandem perpendicularem OR.*

Centro O, & intervallo OR describatur circulus RLKTZ, qui (209) inscriptus polygono erit, ideoque polygonum erit eidem circulo circumscriptum. Sed area polygoni circulo circumscripti aequalis est (208) facto ex omnium laterum semisumma in ejusdem circuli radium; ergo etiam area polygoni AFVSQ aequalis est facto ex omnium laterum semisumma in perpendicularem OR, quae radius est inscripti circuli RLKTZ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIX.

TAB. IV. FIG. 13. 212. *Area circuli aequalis est facto ex dimidia circumferentia in radium ducta.*

Concipiatur circulo circumscriptum regulare polygonum AFLQT, quod quidem inscripto circulo majus erit; si tamen angulis resectis, fiat novum polygonum CEHIOPRSVX, cujus duplo plura sint latera,

tera, hoc sane minus excedet inscriptum circulum, quam praecedens. Ergo quo magis numerus laterum polygoni augetur, eo minus vicissim area polygoni circularem excedet; unde si numerus laterum polygoni evadat infinitus, seu major quovis numero dato, minor vicissim quovis assignabili, atque idcirco contemnendus evadet polygoni areae supra circularem excessus; ergo polygoni hujus area pro circulari, & summa ejusdem laterum pro circumferentia inscripti circuli sumi potest. Sed polygoni ejusdem area aequalis est (210) facto ex ejus laterum semisumma in radium inscripti circuli; ergo etiam area circuli eidem facto erit aequalis, unde cum laterum semisumma pro dimidia circumferentia circuli sumi possit, liquet, aream circuli aequalem esse facto ex dimidia circumferentia in radium ducta. Q. E. D.

SCHOLION I.

213. Si ergo fiat rectangulum habens pro altitudine radium circuli, & pro basi rectam aequalem circumferentiae; rectanguli ejusdem area aequabitur circulari; ideoque area circuli nota esset, seu haberetur circuli *quadratura*, si data in numeris diametro, ejus quoque circumferentia posset in accuratis numeris exhiberi. Verum enim vero ut ut ars inveniendi hac nostra aetate egregie promota fuerit, nihilominus circumferentiae longitudinem in accuratis numeris hactenus nemo dedit; unde concludi debet, quadraturam circuli nondum inventam esse.

SCHOLION II.

214. Circuli autem circumferentia invenitur, vel mechanice, conferendo scilicet cum diametro longitudinem fili, circumferentiae exacte undique circumplicati; vel geometrice, calculando ambitum alicujus polygoni regularis circulo inscripti, vel cir-

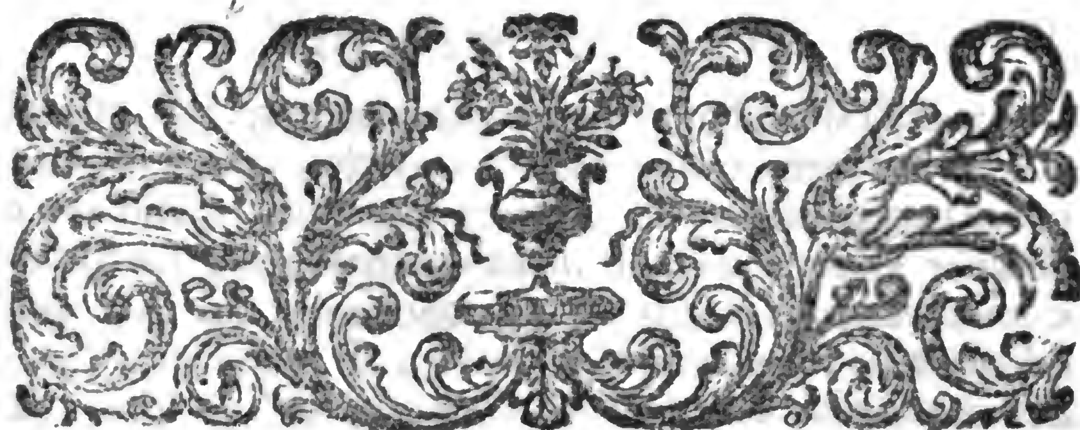
E 2 cum-

cumscripti, quod magno numero laterum terminetur. Hunc in modum *Archimedes* prope verum invenit circumferentiae longitudinem, ostenditque nimirum, si diameter circuli dividatur in septem aequales partes, harum viginti duas in ejus circumferentia proxime contineri. Quamvis autem Geometrae recentiores variis postea methodis insistentes, magis quam *Archimedes* accesserint ad longitudinem veram circumferentiae, omnes tamen conveniunt inter se, quod si diameter circuli dividatur in 100 aequales partes, ejus circumferentia in praxi assumi potest velut aequalis partibus 314.

SCHOLION III

115. Inventa hoc modo longitudine prope vera circumferentiae, etiam circuli quadratura proximè invenietur, cum haec aequetur (111) facto ex dimidia circumferentia in radium ducta. Haec autem circuli area sic inventa, plusquam sufficiens est applicationi Geometriae, etiam dum exactitudine maxima opus est; adeo ut Geometrae peritiores veram circuli quadraturam inter ea referant, quorum pretium sit sola pulchritudo, & raritas, ideoque operam suam impendant rerum magis utilium inventioni. Atque ideo magis, quod admodum certum habeant, quod si vera logitudo circumferentiae exprimi posset numeris accuratis, ii adeo forent magni, ut nullo modo possent in calculis adhiberi, atque ita in praxi semper recurrendum esset ad eos, quos nunc adhibemus, ignorata vera circuli quadratura. Verum qui rerum mathematicarum non nisi superficiariam notionem habent, plerumque magna cum confidentia celebratissimi hujus problematis solutionem aggrediuntur; nec desunt etiam qui sibi persuadeant, se eam jam invenisse,

PARS



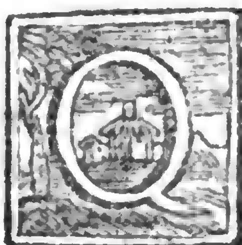
PARS SECUNDA

DE RECTARUM, ET FIGURARUM PLANARUM MUTUA PROPORTIONE

CAPUT I.

De principiis proportionum.

DEFINITIO I.

216. Uantitates *homogeneae*, five *ejuſdem generis* illae ſunt, quae eundem habent numerum dimenſionum. Ita ſunt homogeneae duae lineae; quippe ambae unica tantum ſunt praeditae dimenſione. Idem de duabus ſuperficiebus, & de duobus ſolidis eſt dicendum.

DEFINITIO II.

217. *Quantitates heterogeneae*, ſive *diverſi generis* ſunt, quae non eundem habent numerum dimenſionum. Ita linea heterogenea eſt tam ſuperficiei, quam ſolido; quippe una tantum lineae dimenſio eſt, duplex vero ſuperficiei, & triplex ſolidi.

DEFINITIO III.

218. Si duae homogeneae quantitates quoad quantitatem invicem comparentur; relatio, aut respectus, quem una ad aliam habet, *ratio* appellatur. Ratio autem dicitur *geometrica*, si in ea comparatione spectemus quoties una quantitas aliam contineat, vel in eadem contineatur; *arithmetica* vero, si solum consideremus quantum una alteram superet, vel ab altera superetur. Quare dum inter se comparantur duo numeri 12 & 4, si consideretur quoties numerus 12 contineat numerum 4, prodibit ratio geometrica; at si consideretur quot unitatibus numerus 12 major sit numero 4, tunc arithmetica erit ratio. Nomine autem *rationis*, nisi quid addatur, geometrica semper venit.

DEFINITIO IV.

219. In omni ratione quantitas quae ad aliam refertur, dicitur *antecedens*; ea vero ad quam refertur, *consequens* appellatur. Antecedens autem, & consequens rationis *termini* dici solent.

DEFINITIO V.

220. *Ratio aequalitatis* illa est, cujus antecedens consequenti suo aequatur, veluti est ratio 3 ad 3. Si vero antecedens consequenti suo sit inaequale, tunc dicitur *ratio inaequalitatis*, veluti est ratio 6 ad 8, aut 3 ad 6.

DEFINITIO VI.

221. Ratio *majoris inaequalitatis* est illa, cujus antecedens consequente suo est majus, veluti est ratio 6 ad 3; ratio autem *minoris inaequalitatis* est, cujus antecedens consequente suo est minus, veluti est ratio 3 ad 6.

DE-

DEFINITIO VII.

222. Duae rationes dicuntur *similes*, aut *aequales*, sive *eaedem*, quando antecedens unius aeque, sive eodem modo (hoc est nec magis, nec minus) continet suum consequens, aut continetur in illo, quo alterum antecedens contineat suum consequens, aut contineatur in illo. Ita ratio 6 ad 3 eadem erit cum ratione 4 ad 2; quippe antecedens primum 6 eodem modo continet consequens suum 3, quo antecedens alterum 4 contineat consequens suum 2. Unde ut duae rationes aequales sint, aut eaedem, non operae pretium est, ut iisdem antecedentibus, & consequentibus exprimantur, sed opus est tantum, ut antecedentia aeque, sive eodem modo consequentia sua contineant, vel in iisdem contineantur.

COROLLARIUM I.

223. Liquet ergo aequales quantitates A & H habere eandem rationem ad tertiam C. Antecedentia enim aequalia A, & H aeque, sive eodem modo continent commune consequens C. TAB. IV. FIG. 14.

COROLLARIUM II.

224. Vicissim tertia C eandem habebit rationem ad aequales quantitates A & H. Commune quippe antecedens C aeque, sive eodem modo continetur in aequalibus consequentibus A, & H. TAB. IV. FIG. 14.

COROLLARIUM III.

225. Pariter si quantitates A, & H eandem habuerint rationem ad tertiam C; aequales invicem erunt. Cum enim ratio A ad C eadem sit cum (*ex hyp*) ratione H ad C, utique (222) antecedens A ae- TAB. IV. FIG. 14.

que, five eodem modo continebit consequens suum C, quo antecedens alterum H contineat consequens suum C; aequales itaque erunt quantitates A, & H.

COROLLARIUM IV.

TAB. IV. FIG. 15.

226. Demum si duae rationes A ad C, & R ad F sint aequales tertiae rationi E ad H; etiam invicem aequabuntur. Nam quia ratio A ad C aequalis est (*ex hyp*) rationi E ad H, utique (221) eodem modo A continebit C, quo E continet H. Pariter cum ratio R ad F aequetur (*ex hyp*) rationi E ad H, eodem modo (222) R continebit F, quo E continet H; ergo etiam A eodem modo continebit C, quo R continet F, hoc est (222) ratio A ad C aequabitur rationi R ad F.

DEFINITIO VIII.

227. Si duae rationes majoris inaequalitatis mutuo comparentur; ea ratio dicitur *major*, cujus antecedens saepius continet suum consequens, quam alterum antecedens contineat suum. Ita ratio 8 ad 2 major est ratione 6 ad 3; nam 8 quater continet 2, cum 6 bis tantum contineat 3.

COROLLARIUM I.

TAB. IV. FIG. 16.

228. Duarum ergo inaequalium quantitatum A, & H, major A majorem habebit rationem ad tertiam C, quam minor H habeat ad eandem C. Major quippe A saepius continebit tertiam C, quam ipsam contineat minor H.

COROLLARIUM II.

229. Viciſſim si ratio A ad C major sit ratione H ad C; erit A major H. Saepius (227) enim A quam H continebit tertium C, atque adeo A erit major H.

De-

DEFINITIO IX.

230. Si duae rationes minoris inaequalitatis invicem compararentur; illa ratio dicitur *major*, cujus antecedens minus continetur in consequente suo, quam antecedens alterum in suo. Ita ratio 3 ad 6 major erit ratione 2 ad 8; nam 3 bis tantum continetur in 6, cum 2 in 8 quater contineatur.

COROLLARIUM I.

231. Hinc duarum inaequalium quantitatum A, & H, major A majorem habebit rationem ad tertiam C, quam minor H habeat ad eandem C. Nam A minus quam H continebitur in tertia C. TAB. IV. FIG. 17.

COROLLARIUM II.

232. Similiter si ratio A ad C major sit ratione H ad C; erit A major H. Minus enim A quam H continebitur (230) in tertia C, ideoque A major erit H. TAB. IV. FIG. 17.

DEFINITIO X.

233. Quando duae rationes sunt inter se aequales, tunc quatuor illorum termini dicuntur *proportionales*. Ita quia ratio 6 ad 3 aequatur (222) rationi 4 ad 2; quatuor numeri 6, 3, 4, 2 erunt proportionales.

DEFINITIO XI.

234. Quando duae rationes aequales sunt hujusmodi, ut consequens primae rationis sit idem cum antecedente secundae; tunc tres termini illarum dicuntur *continue proportionales*, & ille qui bis repetitur, vocatur *medius proportionalis*. Ita quia ratio 2 ad 4 aequatur (222) rationi 4 ad 8, & numerus 4, qui consequens est primae rationis, est antecedens etiam

etiam secundae; erunt numeri 2, 4, 8 continuè proportionales, & 4 erit medius proportionalis.

DEFINITIO XII.

235. *Ratio composita* ex pluribus rationibus illa dicitur, quam habet factum ex earum antecedentibus ad factum ex consequentibus earundem. Ita ratio composita ex rationibus 3 ad 5, & 4 ad 6, erit illa quam habet factum ex antecedentibus 3 & 4 ad factum ex consequentibus 5 & 6, seu erit ratio 12 ad 30.

DEFINITIO XIII.

136. Si duae rationes componentes aequentur; ratio ex illis composita dicitur *duplicata* alterutrius componentium. Ita quia ex duabus rationibus aequalibus 6 ad 3, & 4 ad 2 componitur (235) ratio 24 ad 6; haec erit duplicata rationis 6 ad 3, vel etiam 4 ad 2.

DEFINITIO XIV.

237. Si vero tres rationes componentes aequentur, ratio composita inde orta, dicitur *triplicata* cujuslibet componentium. Ita cum ex tribus rationibus aequalibus 6 ad 3, 4 ad 2, & 10 ad 5 componatur (235) ratio 240 ad 30; haec erit triplicata rationis 6 ad 3, vel 4 ad 2, aut 10 ad 5.

DEFINITIO XV.

TAB. IV. FIG. 18. 19.

238. *Figurae similes* sunt, si singuli anguli unius singulis alterius angulis sint aequales, & latera *homologa*, seu angulis aequalibus opposita, vel intercepta, fuerint proportionalia. Ita similia erunt triangula CAF, ORE, si singuli anguli F, A, C aequentur sin-

singulis E, R, O, & AC sit ad RO, ut CF ad OE, & CF ad OE, ut FA ad ER, & FA ad ER, ut AC ad RO. Eodem modo explicabitur similitudo aliarum omnium figurarum.

DEFINITIO XVI.

239. Figurae L & V dicuntur habere latera *reciproce proportionalia*, si latus AS figurae L fuerit ad latus SC figurae V, ut hujus latus SO ad illius latus SH. TAB. IV. FIG. 20.

DEFINITIO XVII.

240. Rectangulum *sub rectis* AS, SC, vel simpliciter *rectangulum* ASC est illud, quod continetur sub rectis AS, SC ad angulum rectum junctis. Similiter cum dicitur *rectangulum sub rectis* AC, CS, aut *rectangulum* ACS, intelligitur rectangulum, quod continetur sub rectis AC, & CS ad rectum angulum constitutis. TAB. IV. FIG. 21.

CAPUT II.

De nonnullis Parallelogrammorum, & Rectangulorum symptomatis, deque Regulis proportionum.

PROPOSITIO I.

241. *Parallelogramma CBIA, AIEF quae eandem habent altitudinem, sive inter easdem existunt parallelas, eam inter se rationem habent, quam bases CA, AF.* TAB. IV. FIG. 22. 23.

I. Sunto commensurabiles bases CA, AF, atque AS sit mensura utriusque, quae exempli gratia con- FIG. 22.

continieatur bis in AF, ter vero in CA. Ex puncto S agatur ad FE parallela SO. Cum CA sit tripla AS, parallelogrammum CBIA tria parallelogrammma continebit, quorum singula (202) aequantur AIOS, ideoque parallelogrammum CBIA triplum erit alterius AIOS. Similiter ob AF duplam AS, parallelogrammum AIEF duplum erit eiusdem AIOS; ergo (222) parallelogrammum CBIA erit ad aliud AIEF, ut 3 ad 2. Sed etiam (*ex hyp*) basis CA est ad basim AF, ut 3 ad 2; ergo (226) parallelogrammum CBIA erit ad aliud AIEF, ut basis CA ad basim AF.

TAB. IV. FIG. 23. II. Sunto incommensurabiles bases CA, AF, ponaturque, si fieri potest, parallelogrammum CBIA esse ad aliud AIEF, ut basis CA ad aliam rectam AV, minorem scilicet basi AF. Per continuam bisectionem basis CA deveniatur ad eiusdem aliquam partem CR recta VF minorem, quae proinde ablata quoties potest ab AF, relinquet seipsa minorem SF. Hoc posito, si ex S agatur ad FE parallela SO, prodibunt aeque alta parallelogramma CBIA, AIOS, quorum commensurabiles erunt bases CA, AS, utpote habentes communem mensuram CR. Quia SF minor (*ex constr*) est CR, haec autem (*ex constr*) minor VF; erit SF multò minor VF, ideoque punctum S cadet inter V, & F, & recta AV minor erit AS. Itaque CA ad AV majorem rationem (227) habet, quam eadem CA ad AS. Sed (*ex hyp*) est CA ad AV, ut parallelogrammum CBIA ad aliud AIEF, & CA est (*num. I.*) ad AS, ut parallelogrammum CBIA ad aliud AIOS; ergo parallelogrammum CBIA ad aliud AIEF majorem rationem habebit, quam idem parallelogrammum CBIA ad aliud AIOS, & ideo (227) parallelogrammum CBIA saepius continebit parallelogrammum AIEF, quam aliud AIOS, quod est absurdum. Simili modo ostendam,

paral-

parallelogrammum CBIA non esse ad aliud AIEF, ut basis CA ad aliam rectam basi AF majorem; ergo parallelogrammum CBIA erit ad aeque altum AIEF, ut basis CA ad basim AF. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

242. Cum quaevis triangula CIH, HIF dimidia (176) sint aeque altorum parallelogrammorum CAIH, HIEF; patet, etiam triangulum CIH esse ad aeque altum triangulum HIF, ut basis CH ad basim HF. TAB. IV. FIG. 24.

COROLLARIUM II.

243. Quia etiam rectangula L, & V sunt (150) parallelogramma, patet, rectangulum L esse ad aliud aequè altum V, ut basis CH ab basim HF. TAB. IV. FIG. 25.

PROPOSITIO II.

244. *Parallelogramma, & triangula aequalia L, & V, quae unum angulum AFH uni OFC habent aequalem; etiam latera circa aequales angulos habent reciprocè proportionalia, hoc est etiam AF est ad FC, ut OF ad FH. Et si latera habeant, reciproce proportionalia, parallelogramma, & triangula aequalia erunt.* TAB. IV. FIG. 26. 27.

I. Ponantur in directum rectae AF, FC. Quoniam recta HF insistit rectae AC, utique anguli AFH, HFC duobus rectis aequari (98) debent. Sed angulus AFH (*ex hyp*) aequatur alteri OFC; ergo etiam duobus rectis aequabuntur anguli OFC, HFC, atque adeo etiam rectae OF, FH erunt (103) positae in directum. Producantur in parallelogrammis rectae SH, PC donec conveniant ad punctum E; at in triangulis jungatur tantum HC. Quoniam parallegrammum, & triangulum L alteri V est (*ex hyp*) aequale, erit (223) L ad R, ut V ad R. Sed (241, 242) L est ad

ad R, ut AF ad FC, & V est ad R, ut OF ad FH; ergo etiam AF erit ad FC, ut OF ad FH.

II. Parallelogrammum, & triangulum L est ad aliud aeque altum R, ut (241, 242) AF ad FC. Similiter parallelogrammum, & triangulum V est ad idem aeque altum R, ut OF ad FH. Sed (*ex hyp*) AF est ad FC, ut OF ad FH; ergo etiam L erit ad R, ut V ad R, ideoque aequantur (225) parallelogramma, & triangula L, & V. Q. E. D.

PROPOSITIO III.

TAB. V. FIG. 1. 2.

245. *Si quatuor rectae AS, SC, OS, SH fuerint proportionales, hoc est, si AS sit ad SC, ut OS ad SH; rectangulum L sub extremis AS, SH aequale est rectangulo V sub mediis SC, OS. Et si rectangulum L sub extremis aequetur rectangulo V sub mediis; erunt illae quatuor rectae proportionales.*

I. Parallelogramma, quae circa aequales angulos habent latera reciproce proportionalia, sunt (244) aequalia inter se: sed rectangula L, & V sunt (150) parallelogramma, quae circa rectos, seu aequales angulos ASH, OSC habent latera reciproce proportionalia, quippe (*ex hyp*) AS est ad SC, ut OS ad SH; ergo rectangula L, & V aequalia erunt.

II. Cum aequalia sint (*ex hyp*) rectangula, seu (150) parallelogramma L, & V, habeantque rectos, seu aequales (*ex hyp*) angulos ASH, OSC, utique etiam latera circa aequales angulos habebunt (244) reciproce proportionalia; igitur AS erit ad SC, ut SO ad SH. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

246. Hinc si quatuor numeri fuerint proportionales, factum extremorum aequabitur (245) facto ex me-

mediis. Ita cum sit 2 ad 4, ut 8 ad 16, factum extremorum 2, & 16, nempe 32 aequabitur facto ex mediis 4 & 8, nempe 32.

COROLLARIUM II.

247. Quare datis tribus numeris quibuscumque veluti 2, 4, 8, invenietur quartus proportionalis 16, si factum ex mediis 4, & 8 per primum 2 dividatur. Cum enim factum sub mediis aequetur facto primi in quartum (246) ducti, utique si factum sub mediis per primum numerum dividatur, in quoto quartus prodibit.

COROLLARIUM III.

248. Similiter si tres rectae A, S, H fuerint continue proportionales; rectangulum sub extremis A, & H aequabitur quadrato mediae S. Esto enim O aequalis mediae S. Cum A sit ad S, ut (*ex hyp*) eadem S ad H, etiam A erit ad S, ut O ad H; ideoque rectangulum sub extremis A, & H aequabitur rectangulo (245) sub aequalibus mediis S, & O, seu quadrato mediae S. TAB. V. FIG. 3.

COROLLARIUM IV.

249. Et contra si rectangulum sub extremis A, & H aequale sit quadrato mediae S; tres rectae A, S, H erunt continue proportionales. Esto enim O aequalis mediae S. Cum rectangulum sub A, & H aequale sit (*ex hyp*) quadrato mediae S, idem rectangulum etiam aequale (*ex constr*) erit rectangulo sub S, & O, ideoque (245) A erit ad S, ut O ad H. Atqui S, & O sunt aequales; ergo etiam A erit ad S, ut eadem S ad H.

Co-

COROLLARIUM V.

250. Si ergo tres numeri fuerint continue proportionales; factum extremorum aequabitur quadrato medii. Ita cum 4 sit ad 8, ut 8 ad 16, factum extremorum 4 & 16, nempe 64 aequabitur quadrato mediae 8, nimirum 64.

SCHOLION I.

251. Ex corollario secundo hujus propositionis colligunt Geographi terrestris diametri magnitudinem. Cum enim circumferentia proxime contineat vigintiduas illarum partium, quarum septem accurate (124) in diametro continentur, erit circumferentia terrae ad ejus diametrum, ut 22 ad 7. Est autem (169) terrae circumferentia passuum Parisiensium 24649920; igitur si ex datis tribus numeris 22, 7, & 24649620 inveniatur quartus proportionalis, prodibit terrae diameter, quae erit passuum Parisiensium 7843156, dabitque milliaria Parisiensia 7843, ac praeterea passus 156.

SCHOLION II.

252. Ex hac quoque propositione octo *Regulae* derivantur, quibus tota ferme innixa est Geometrarum Dialectica.

REGULA I.

TAB. V. FIG. 2. 253. *Si prima AS sit ad secundam SC, ut tertia OS ad quartam SH;* etiam invertendo *secunda SC erit ad primam AS, ut quarta SH ad tertiam OS.*

Quia

Quia AS est ad SC, ut OS ad SH, rectangulum L sub extremis AS, SH aequabitur (245) rectangulo V sub mediis SC, OS. Itaque (224) rectangulum R erit ad L, ut idem R ad V: sed R est ad L, ut (241) SC ad AS, & R est ad V, ut (241) SH ad OS; ergo etiam SC erit ad AS, ut SH ad OS. Q. E. D.

REGULA II.

254. *Si prima AS sit ad secundam SO, ut tertia SC ad quartam SH; etiam* permutando *prima AS erit ad tertiam SC, ut secunda SO ad quartam SH.* TAB. V. FIG. 2.

Quia (*ex hyp*) AS est ad SO, ut SC ad SH, rectangulum L sub extremis AS, SH aequabitur (245) rectangulo V sub mediis SO, SC. Itaque L erit ad R, ut (223) V ad idem R: sed L est ad R, ut (241) AS ad SC, & V est ad R, ut (241) OS ad SH; ergo etiam AS erit ad SC, ut OS ad SH. Q. E. D.

COROLLARIUM.

255. Si fuerit prima A ad secundam C, ut tertia E ad quartam F, sitque prima A aequalis tertiae E; etiam secunda C aequabitur quartae F. Cum enim A (*ex hyp*) sit ad C, ut E ad F, etiam (254) permutando, A erit ad E, ut C ad F: sed A ipsi E est [*ex hyp*] aequalis; ergo & C aequabitur ipsi F. TAB. V. FIG. 4.

REGULA III.

256. *Si prima A sit ad secundam C, ut prima F ad secundam H, & secunda C ad tertiam E, ut secunda H ad tertiam R, & sic deinceps; etiam* TAB. V. FIG. 5.

ex aequo *prima A erit ad ultimam E, ut prima F ad ultimam R.*

Cum A ſit ad C, ut (*ex hyp*) F ad H, etiam (254) permutando, A erit ad F, ut C ad H. Similiter cum C ſit (*ex hyp*) ad E, ut H ad R, etiam (254) permutando, C erit ad H, ut E ad R. Itaque A eſt ad F, ut C ad H, & E eſt ad R, ut C ad H; ergo (226) etiam A erit ad F, ut E ad R, & permutando, A erit ad E, ut F ad R. Q. E. D.

REGULA IV.

TAB. V. FIG. 6. 257. *Si fuerit ut prima A ad ſecundam C, ita prima F ad ſecundam H, & ut ſecunda C ad tertiam E, ita tertia quaepiam O ad primam F; etiam* ex aequo perturbate *prima A erit ad tertiam E, ut tertia O ad ſecundam H.*

Ut C eſt ad E, ita poteſt H eſſe ad aliquam quampiam R. Jam quia ut C ad E, ſic O eſt (*ex hyp*) ad F, & ut eadem C ad E, ſic (*ex conſtr*) H eſt ad R; erit (226) O ad F, ut H ad R, & permutando, O ad H, ut F ad R. Rurſus quia A eſt ad C, ut (*ex hyp*) F ad H, & C eſt ad E, ut (*ex conſtr*) H ad R; etiam ex aequo, A erit ad E, ut F ad R. Sed vidimus O eſſe ad H, ut F ad R; ergo (226) etiam A erit ad E, ut O ad H. Q. E. D.

REGULA V.

TAB. V. FIG. 2. 258. *Si prima AS ſit ad ſecundam SC, ut tertia OS ad quartam SH; etiam* componendo *prima AS ſimul cum ſecunda SC erit ad ſecundam SC, ut tertia*

OS

OS simul cum quarta SH est ad quartam SH, sive AC erit ad CS, ut OH ad HS.

Cum AS sit ad SC, ut (*ex hyp*) OS ad SH; rectangulum L alteri V erit (245) aequale, additoque utrinque R, rectangulum LR aequabitur ipsi VR. Igitur (223) LR erit ad R, ut VR ad idem R: sed LR est ad R, ut (241) AC ad CS, & VR est ad R, ut (241) OH ad HS; ergo etiam AC erit ad CS, ut OH ad HS. Q. E. D.

R E G U L A VI.

259. *Si A sit ad C, ut E ad H, & E sit ad H, ut R ad F, & sic deinceps; summa antecedentium A, E, R erit ad summam consequentium C, H, F, ut antecedens unum A ad consequens suum C.* TAB. IV. FIG. 15.

Quia A est ad C, ut (*ex hyp*) E ad H, etiam permutando, A erit ad E, ut C ad H. Simili modo ostendetur E esse ad R, ut H ad F. Cum ergo sit A ad E, ut C ad H, etiam (258) componendo, A simul cum E erit ad E, ut C simul cum H est ad H. Vidimus autem E esse ad R, ut H ad F; ergo etiam (256) ex aequo, A simul cum E erit ad R, ut C simul cum H est ad F, atque iterum (158) componendo, tres simul A, E, R erunt ad R, ut tres simul C, H, F sunt ad F. Igitur permutando, (254) tres simul A, E, R erunt ad tres simul C, H, F, ut R ad F, sive ut A ad C. Q. E. D.

R E G U L A VII.

260. *Si prima AC sit ad secundam CS, ut tertia OH ad quartam HS; etiam* dividendo *excessus* TAB. V. FIG. 2.

sus primae AC supra secundam CS erit ad secundam CS, ut excessus tertiae OH super quartam HS est ad quartam HS, seu AS erit ad SC, ut OS ad SH.

Rectangulum LR est ad aliud R, ut (241) AC ad CS. Similiter rectangulum VR est ad idem R, ut (241) OH ad HS: sed (*ex hyp*) AC est ad CS, ut OH ad HS; ergo etiam rectangulum LR erit ad R, ut rectangulum VR ad idem R ideoque (225) rectangulum LR alteri VR erit aequale. Unde hinc inde ablato R, rectangulum L aequabitur ipsi V, & proinde (245) AS erit ad SC, ut OS ad SH. Q. E. D.

REGULA VIII.

TAB. V. FIG. 7. 261. *Si tota AC sit ad ablatam partem CS, ut tota OH ad ablatam partem HR; etiam* convertendo *tota AC erit ad reliquam sui partem SA, ut tota OH ad reliquam sui partem RO.*

Quia AC est ad CS, ut (*ex hyp*) OH ad HR; etiam (260) dividendo, AS erit ad SC, ut OR ad RH, & invertendo (253), CS erit ad SA, ut HR ad RO, quare componendo (258), AC quoque erit ad SA, ut OH ad RO. Q. E. D.

CA-

CAPVT III.

De Lineis proportionaliter sectis, mutuaque similitudine Triangulorum.

POROPSITIO IV.

262. *Si in triangulo HAE ducatur FC parallela ad unum latus HE; erit AF ad FH, ut AC ad CE. Et contra si fuerit AF ad FH, ut AC ad CE; juncta FC erit ad HE parallela.* TAB.V. FIG. 8.

I. Jungantur EF, HC. Quia triangula FHC, FEC super eadem basi FC, & inter easdem parallelas FC, HE constituta, aequari (198) debent, triangulum V (224) erit ad aliud FHC, ut idem V ad triangulum FEC. Sed (242) triangulum V est ad aeque altum FHC, ut AF ad FH, & (242) triangulum V ad aeque altum FEC est, ut AC ad CE; ergo etiam AF erit ad FH, ut AC ad CE.

II. Triangulum V est ad aliud (242) aeque altum FHC, ut AF ad FH, & (242) triangulum idem V ad aliud FEC est, ut AC ad CE: sed [*ex hyp*] est AF ad FH, ut AC ad CE; ergo etiam triangulum V erit ad aliud FHC, ut idem V ad aliud FEC, ideoque (255) triangula FHC, FEC aequalia mutuo erunt. Habent vero communem basim FC; ergo (199) parallelae erunt FC, HE. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

263. Hinc si in quovis triangulo HAE ducatur FC parallela ad latus unum HE; erit HF ad FA, ut EC ad CA. Nam cum sit (262) AF ad FH, ut AC ad CE, etiam invertendo, HF erit ad FA, ut EC ad CA. TAB.V. FIG. 9.

 CORO-

COROLLARIUM II.

264. Erit quoque HA ad AF, ut EA ad AC. Quippe est (263) HF ad FA, ut EC, ad CA; igitur componendo, HA erit ad AF, ut EA ad AC.

COROLLARIUM III.

265. Quin etiam AH erit ad HF, ut AE ad EC. Est enim (162) AF ad FH, ut AC ad CE; igitur componendo, AH quoque erit ad HF, ut AE ad EC.

COROLLARIUM IV.

266. Quare etiam AH erit ad AF, ut HE ad FC. Ducta enim FR parallela ad AE, erit (265) HA ad AF, ut HE ad ER. Sed in parallelogrammo RFCE est (176) ER ipsi FC aequalis; ergo etiam AH erit ad AF, ut HE ad FC.

COROLLARIUM V.

267. Unde cum HA sit ad AF, ut (264) EA ad AC, etiam EA erit (266) ad AC, ut HE ad FC.

COROLLARIUM VI.

TAB. V. FIG. 10. 268. Pariter datis tribus rectis AV, VB, AR, invenietur quarta proportionalis RS, si binis AV, VB positis in directum, jungatur ad quemvis angulum tertia AR; tum ducta VR, ad hanc ex B agatur parallela BS, ipsi AR occurrens in puncto S. Est (262) enim AV ad VB, ut AR ad RS.

COROLLARIUM VII.

269. Methodus quoque patet ita dividendi in V rectam datam AB, ut AV sit ad VB in data ratione M ad N. Juncta enim ad quemvis angulum inde-

definita AH, sumptisque in ea rectis AR, RS, quae ipsis M, N sint aequales, jungatur SB, eique ex R agatur parallela RV, quae in data ratione secabit rectam AB in V. Est (262) namque AV ad VB, ut AR ad RS, sive (*ex constr*) ut M ad N.

SCHOLION I.

270. Hinc norunt Geodaetae ex vertice B agri triangularis ABC ducere rectam BS, quae agrum illum triangularem dividat in data ratione M ad N. Si enim (269) ita dividatur AC in S, ut AS sit ad SC in data ratione M ad N, & jungatur BS; triangulum ABS erit ad aliud SBC, ut M ad N. Quippe triangulum (242) ABS est ad aliud SBC aeque altum, ut AS ad SC: sed AS (*ex constr*) est ad SC, ut M ad N; ergo etiam triangulum ABS erit ad aliud SBC, ut M ad N. TAB. V. FIG. 11.

SCHOLION II.

271. Si vero non jam ex vertice B, sed alio ex puncto L basis AC ducenda sit recta LS, quae in data ratione M ad N secet triangulum ABC; tunc juncta LB, divisaque (269) basi AC in data ratione in puncto R, ducatur RS ad LB parallela, & jungatur LS, quae in data ratione secabit triangulum ABC. Nam cum triangula BSL, BRL super eadem basi BL, & inter easdem parallelas BL, SR sint constituta, aequalia (198) utique erunt, ideoque addito illis triangulo ABL, trapezium ABSL aequale erit (67) triangulo ABR; unde si utrumque auferas a triangulo ABC, remanebit triangulum LSC aequale (68) alteri RBC. Itaque (221) trapezium ABSL est ad triangulum LSC, ut triangulum ABR ad aliud RBC: sed (242) triangulum ABR est ad aliud RBC, ut AR ad RC, vel (*ex constr*) ut M ad TAB. V. FIG. 12.

 N;

ergo etiam trapezium ABSL erit ad triangulum LSC, ut M ad N.

SCHOLION III.

TAB. V. FIG. 13. 272 Denique ex corollario 4 hujus propositionis derivatur constructio *Scalae Geometricae*, cujus maximus usus est in Architectura tàm Civili, quam Militari, praesertim ubi Ichnographiae sunt contrahendae. Ad quemvis angulum junctis AF, AC, a puncto A ad B sumantur 10 partes aequales AL, L 2, 2 3, 3 4, &c. sitque AF ex. gr. dupla ipsius AB, sumptisque ab A ad C 10 partibus aequalibus A 1, 1 2, 2 3, 3 4 &c. compleatur parallelogrammum ACIF. Deinde per puncta singula divisionum ipsius AC ductis rectis ad AF parallelis, transferantur in CD 10 partes iis aequales, quae sunt in recta AB. Demum puncta C & L, 1 & 2, 2 & 3, 3 & 4, &c. transversis lineis connectantur. Dico, si AB fuerit decempeda, fore AL unum pedem, 99 digitum unum, 88 digitos duos, 77 digitos tres, 66 digitos quatuor, & sic porrò. Nam cum AB sit decempeda, decupla quoque erit unius pedis: sed (*ex constr*) decupla est etiam rectae AL, ergo AL pes unus erit. Deinde cum in triangulo ACL recta 99 sit ad AL parallela, erit (266) AL ad 99, ut AC ad C 9; sed AC decupla (*ex constr*) est C 9; ergo & AL decupla erit 99. Vidimus autem eandem AL esse pedem; ergo 99 digitus (54) erit. Pari modo demonstrabitur, esse 88 digitos duos, 77 tres, 66 quatuor, & sic deinceps.

PROPOSITIO V.

TAB. V. FIG. 14. 273. *Si recta AE angulum trianguli bifariam secans, etiam secet basim HC; basis segmenta* HE

HE, EC eandem rationem habent, quam reliqua latera HA, AC. Et si basis partes HE, EC eandem rationem habuerint, quam reliqua latera HA, AC; recta AE bisecabit angulum HAC.

I. Ducatur CF parallela ad EA, occurrens ipsi AH in F. Cum itaque recta HF secet parallelas AE, FC, externus angulus HAE aequabitur (132) interno opposito AFC. Pariter cum AC secet parallelas AE, FC, alternus angulus EAC aequabitur (132) alterno ACF: sed angulus HAE aequatur (*ex hyp*) angulo EAC; ergo & angulus AFC aequabitur ACF, ideoque aequales (182) erunt etiam AF, AC, & HA (224) erit ad AF, ut eadem HA ad AC. Sed HE est ad EC, ut (262) HA ad AF; ergo & HE erit ad EC, ut HA ad AC.

II. Quia sunt parallelae AE, FC, erit (262) HE ad EC, ut HA ad AF: sed HE est ad EC, ut (*ex hyp*) HA ad AC; ergo & HA erit ad AF, ut eadem HA ad AC, & propterea (225) aequabuntur AF, AC, & angulus AFC (182) aequabitur ACF. Sed angulus HAE aequalis (132) est angulo AFC, & angulus EAC alteri ACF; ergo etiam angulus HAE aequabitur EAC. Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

274. *Si in triangulis FAO, CER singuli anguli O, A, F aequentur singulis R, E, C; triangula sunt similia, hoc est etiam latera aequalibus angulis opposita, habent proportionalia, seu AF erit ad EC, ut FO ad CR, & FO ad CR, ut AO ad ER, nec non AO ad ER, ut AF ad EC.* TAB. V. FIG. 15. 16.

Circa angulum A aequalem ipsi E, sumantur AH, AS aequales singulis EC, ER, & jungatur HS, quae

quae (106) ipsi CR erit aequalis, & angulus AHS aequabitur ipsi C. Sed (*ex hyp*) etiam angulus F eidem C est aequalis; ergo externus angulus AHS aequabitur (75) etiam interno F, ideoque (149) HS erit ad FO parallela. Itaque AF (266) erit ad AH, ut FO ad HS, & (267) FO ad HS, ut AO ad AS, nec non AO ad AS, ut (264) AF ad AH; igitur etiam AF erit ad EC, ut FO ad CR, & FO erit ad CR, ut AO ad ER, nec non AO ad ER, ut AF ad EC Q. E. D.

COROLLARIUM I.

275. Hinc si duo seorsim anguli F, & O trianguli FAO aequentur singulis C, & R alterius trianguli CER; triangulum FAO simile erit alteri CER. Nam cum tertius quoque angulus A tertio E sit (163) aequalis; triangulum FAO aequiangulum erit alteri CER, atque adeo (274) simile ipsi erit.

COROLLARIUM II.

TAB. V. FIG. 15. 276. Similiter si in quovis triangulo FAO ducatur HS ad latus unum FO parallela; triangulum HAS simile erit toti FAO. Nam propter parallelas HS, FO, externus angulus AHS aequatur (132) interno F. Eandem ob caussam externus quoque angulus ASH aequatur interno O; ergo triangulum HAS erit (275) simile alteri FAO.

COROLLARIUM III.

TAB. V. FIG. 17. 18. 277. Denique si ex aequalibus angulis B & F triangulorum similium ABD, EFH ad homologa latera AD, EH demittantur perpendiculares BC, FG; hae inter se erunt, ut eadem homologa latera AD, EH. Cum enim haec triangula (*ex hyp*) sint similia, utique aequabuntur anguli A, & E: sed recti, seu aequales sunt quoque anguli BCA, FGE; ergo

(275)

(275) similia erunt etiam triangula ABC, EFG; ac proinde BC erit ad FG, ut BA ad FE. Sed etiam AD est ad EH, ut BA ad FE, ob similia triangula ABD, EFH; ergo (226) BC quoque erit ad FG, ut AD ad EH.

SCHOLION I.

278. Ex hac propositione determinant Practici distantiam AB duorum locorum A, & B, ad quorum unum B vel ob flumen interjectum, vel ob aliam quamcunque causam accedi nequit. Sumpto quolibet loco D, cujus distantia a puncto A sit exempli gratia pedum 60, ope quadrantis detegantur anguli (97) A, & D. Tum in charta probè complanata assumatur ex scala recta EH partium 60, quot nempè sunt in AD pedes, fiantque (95) anguli E, & H aequales angulis A, & D. Demum lateribus EF, HF, convenientibus mutuo ad aliquod punctum F, aptetur scalae EF, quae si exempli causa inveniatur esse 40 illarum partium, quarum 60 sunt in EH, indicabit quoque intervallum quaesitum AB esse 40 pedum. Cum enim singuli anguli A, & D trianguli ABD aequentur (*ex constr*) singulis angulis E, & H trianguli EFH, erit triangulum ABD simile (275) alteri EFH, & AD erit ad EH, ut AB ad EF, & permutando, AD ad AB, ut EH ad EF. Sed EH est ad EF, ut 60 ad 40; ergo etiam AD erit ad AB, ut 60 ad 40. Sed est AD pedum 60; ergo AB erit 40 pedum. TAB. V. FIG. 17. 18.

SCHOLION II.

279. Ex tertio pariter corollario hujus propositionis invenitur area agri triangularis, cujus altitudo BC est inaccessa. Si enim ejus basis AD sit exempli causa 60 pedum, tunc sumpta EH aequali 60 partibus scalae, fiant anguli E, & H aequales angulis A,

&

& D, atque ad basim EH demissa perpendiculari FG, haec scalae applicetur, quae si inveniatur continere 30 illarum partium, quarum 60 sunt in EH, etiam indicabit rectam BC esse 30 pedum. Quippe ob angulos A & D trianguli ABD aequales angulis E & H trianguli EFH, erit triangulum ABD simile (275) alteri EFH; unde (277) AD erit ad EH, ut BC ad FG, & permutando, AD erit ad BC, ut EH ad FG. Sed EH est ad FG, ut 60 ad 30; ergo etiam AD erit ad BC, ut 60 ad 30. Sed AD est pedum 60; ergo BC erit 30 pedum, & ideo (196) area trianguli ABD erit 900 pedum quadratorum.

PROPOSITIO VII.

TAB. V. FIG. 19. 280. *Si in circulo duae chordae CL, HF se secuerint in puncto O; rectangulum COL sub segmentis unius, aequale est rectangulo HOF sub segmentis alterius comprehenso.*

Jungantur HC, LF. Cum eidem arcui CF insistant anguli H, & L, utique aequales (136] mutuo erunt. Sed etiam angulus COH aequatur (96) sibi ad verticem opposito FOL; ergo similia (275) sunt triangula COH, LOF, ideoque etiam latera aequalibus angulis opposita, proportionalia erunt, nempe CO erit ad OF, ut OH ad OL, & rectangulum COL aequabitur (245) alteri HOF. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

TAB. V. FIG. 20. 281. Si ex quolibet circumferentiae puncto C demissa sit ad diametrum HF perpendicularis CO; hujus quadratum aequabitur rectangulo HOF, quod sub segmentis diametri continetur. Si enim producatur CO ad L, chorda CL bisecta (190) erit in O, ideoque rectangulum COL idem erit cum quadrato

per-

perpendicularis CO. Sed rectangulum COL (280) rectangulo HOF est aequale; ergo etiam quadratum perpendicularis CO aequabitur eidem rectangulo HOF.

COROLLARIUM II.

282. Quia quadratum perpendicularis CO aequale est (281) rectangulo HOF, erit (249) HO ad CO, ut eadem CO ad OF; ideoque CO media erit proportionalis inter segmenta HO, OF.

COROLLARIUM III.

283. Ut ergo inter duas HO, OF detegatur media proportionalis OC, illae sunt in directum jungendae, supraque illarum summam HF tamquam diametrum describendus semicirculus HCF, atque ex puncto O erecta perpendicularis OC problemati (282) satisfaciet.

PROPOSITIO VIII.

284. *Si in duobus triangulis FAO, CER fuerint omnia latera sibi mutuo proportionalia, nimirum AF sit ad EC, ut FO ad CR, & FO ad CR, ut AO ad ER, & AO ad ER, ut AF ad EC; triangula aequiangula quoque erunt, ideoque etiam similia.* TAB. V. FIG. 15. 16.

Sumpta AH aequali EC, ducatur HS ad FO parallela. Recta (*ex hyp*) AF est ad EC, ut FO ad CR: sed AH est ipsi EC aequalis; ergo etiam AF erit ad AH, ut FO ad CR. Sed ut AF ad AH, ita (266) est FO ad HS; ergo etiam FO erit (226) ad HS, ut eadem FO ad CR, ideoque (255) aeaequabuntur HS, CR. Pari modo ostendentur etiam aequales AS, ER; igitur triangula HAS, CER sunt mutuo aequilatera, ac proinde (83) aequiangula, seu

(274)

(274) similia. Sed triangulum FAO simile (276) est alteri HAS; ergo simile quoque erit triangulo CER. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

TAB. V. FIG. 15. 16.

285. *Si in duobus triangulis FAO, CER circa aequales angulos A, E fuerint latera invicem proportionalia, nimirum AF sit ad EC, ut AO ad ER; triangula erunt similia.*

Circa angulum A aequalem ipsi E, sumantur AH, AS aequales singulis EC, ER, & jungatur HS, quae (106) ipsi CR erit aequalis. Igitur triangula HAS, CER sunt mutuo aequilatera, ideoque (83) aequiangula, & (274) similia. Jam vero cum AF sit ad EC, ut (*ex hyp*) AO ad ER, erit quoque AF ad AH, ut AO ad AS, & dividendo, FH ad HA, ut OS ad SA, atque invertendo, AH ad HF, ut AS ad SO. Igitur HS parallela (262) erit ad FO, & triangulum FAO simile (276) alteri HAS; unde simile quoque erit triangulo CER. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

TAB. V. FIG. 21. 22.

286. Hinc super datam AC construetur triangulum AFC simile alteri LRO, si facto (87) angulo CAH aequali angulo L, fiat (268) ut LO ad AC, ita LR ad AF, & jungatur FC.

COROLLARIUM II.

TAB. V. FIG. 25.

287. Unde parallelogramma similia RSAC, FEAO communem angulum A habentia, sunt circa eandem diagonalem, Nam quia similia sunt (*ex hyp*) parallelogramma RSAC, FEAO, erunt (238) aequales anguli S, E, & AS erit ad AE, ut SR ad EF; quapropter ductis diagonalibus AR, AF, triangulum RSA erit (285) simile FEA, & angulus RAS aequalis

qualis alteri FAE. Sed recta AS coincidit cum AE; ergo & AR coincidet cum AF (20), atque ita parallelogramma RSAC, FEAO sunt circa eandem diagonalem AF.

PROPOSITIO X.

288. *Supra datam rectam AC describere figuram AFEC alteri LRHO similem, similiterque cum illa positam.* TAB. V. FIG. 23. 24.

Ducta diagonali RO, quae figuram LRHO dividet in triangula P & K, fiat supra AC triangulum V alteri (286) P simile, & supra FC triangulum S simile ipsi K: dico, figuram AFEC similem esse alteri LRHO, similiterque cum illa positam. Nam ob similia triangula V, P, angulus AFC aequabitur (238) LRO: sed ob similia triangula S, & K, etiam angulus CFE aequatur angulo ORH; ergo totus angulus AFE aequabitur toti LRH. Pari modo ostendam angulum ACE aequari angulo LOH; ergo cum (*ex constr*) etiam anguli A, & E aequentur angulis L, & H, sequitur figuram AFEC esse aequiangulam datae LRHO. Demum in similibus triangulis V, & P est (238) AF ad LR, ut FC ad RO: sed etiam in similibus triangulis S, & K est (238) FE ad RH, ut FC ad RO: ergo etiam (226) AF erit ad LR, ut FE ad RH. Eodem ratiocinio reliqua latera aequalibus angulis intercepta, demonstrantur proportionalia; ergo figura AFEC similis (238) erit alteri LRHO, similiterque cum illa posita. Q. E F.

COROLLARIUM I.

289. Quaecumque ergo figurae AFEC, LRHO erunt mutuo similes, & similiter positae, si ex totidem triangulis similibus, similiterque positis coalescant

Co-

COROLLARIUM II.

TAB. V. FIG. 25. 290. Hinc parallelogramma RSAC, FEAO circa eandem diagonalem AF descripta, sunt similia inter se. Nam ob parallelas SR, EF, triangulum ASR simile est (276) alteri AEF, Pari modo ostendam, triangulum ACR simile esse alteri AOF; ergo similia erunt (289) parallelogramma RSAC, FEAO.

PROPOSITIO XI.

TAB. VI. FIG. 23. 24. 291. *Si ex duobus aequalibus angulis A, F figurarum similium EARCV, HFILS agantur ad reliquos angulos diagonales AV, AC, FS, FL; figurae in eundem similium triangulorum numerum dividentur.*

Cum (*ex hyp*) similes sint figurae EARCV, HFILS, (238) circa aequales angulos E & H erit EV ad HS, ut EA ad HF; ideoque triangulum K simile (285) erit P, & angulus EVA aequabitur alteri HSF. Sed ob similitudinem figurarum, etiam totus angulus EVC aequatur toti HSL; ergo & reliquus AVC aequabitur reliquo FSL. Simili modo ostendam, triangulum G simile esse T, & inde angulum ACV aequari angulo FLS; ergo & triangulum O simile (275) erit Z. Q. E D.

COROLLARIUM. I.

TAB. VI. FIG. 1. 2. 292 Hinc si ex duobus aequalibus angulis A, F figurarum similium AEDCB, FMLHG agantur ad reliquos angulos diagonales AD, AC, FL, FH pariterque ex aequalibus angulis B, G, ducantur diagonales BE, BD, GM, GL; singula triangula AEB, ADB, ACB similia erunt singulis FMG, FLG, FHG. Etenim cum ex aequalibus figurarum similium angulis B & G ductae sint diagonales

BE,

BE, BD, GM, GL, utique triangulum AEB simile (291) erit alteri FMG. Rursus quia ex aequalibus angulis D & L ductae sunt diagonales DA, DB, LF, LG, triangulum ADB erit (291) simile FLG. Demum cum ex aequalibus angulis A & F sint ductae diagonales AD, AC, FL, FH, triangulum ACB erit (291) simile FHG.

COROLLARIUM III.

293. Et vicissim si singula triangula AEB, ADB, ACB similia sint singulis FMG, FLG, FHG; figurae AEDCB, FMLHG erunt similes inter se. Si enim non essent similes hae figurae, neque etiam similia forent (292) triangula recensita, contra hypothesim.

SCHOLION I.

294. Hoc ultimum corollarium in tota Agrimensura maximum habet usum. Etenim si ex duobus tantum locis A, & B fundi, aut agri cujuspiam Ichnographiam describere, & dimensiones accipere opus sit: metire prius locorum distantiam AB, & oculorum aciem dirigens in objecta conspicua, quibus ager terminatur in E, D, C, probè observa angulos BAE, BAD, BAC, itemque ABE, ABD, ABC. Hoc peracto, in charta, aut tabula duc rectam lineam FG tot particulis è scala depromptis constantem, quot inventi sunt pedes in intervallo AB, fiantque in F, & G anguli aequales inventis in A, & B. Linearum ita ductarum concursus in M, L, H, determinabunt ambitum figurae FMLHG, quae (293) agro describendo similis prorsus erit. Itaque quot fuerint particulae in rectis inventis FM, ML, LH, HG, totidem pedes erunt in intervallis AE, ED, DC, CB. Area vero ex dictis (206) facile innotescet.

PROPOSITIO XII.

Tab. VI. Fig. 3. 295. *Si ex eodem extra circulum puncto C ducantur duae rectae, quarum altera CH circulum secet, altera CA eundem tangat; erit tangens media proportionalis inter totam secantem, & ejus partem extra circulum, nempe inter HC, & CS.*

Jungantur AH, AS. Angulus CAS aequatur (140) alteri AHS, vel AHC: sed etiam angulus ACS aequalis est angulo ACH; ergo triangulum HAC simile (275) erit alteri ASC, & CH erit ad CA, ut eadem CA ad CS, tangensque proinde CA erit (234) media protionalis inter HC, & CS.

COROLLARIUM I.

296. Quoniam HC est ad CA, ut CA ad CS, tangentis CA quadratum (248) erit aequale rectangulo HCS.

COROLLARIUM II.

297. Si ex eodem puncto C agatur quaevis alia secans CO, etiam rectangulum OCL aequale erit quadrato (296) tangentis CA; unde (75) rectangulum OCL aequabitur alteri HCS.

COROLLARIUM III.

Tab. VI. Fig. 4. 298. Quae ex eodem puncto C circulum tangunt, CA, CR, mutuò sunt aequales. Earum quippe quadrata cum aequentur eidem (296) rectangulo HCS, etiam mutuò sunt aequalia, aequalesque proinde erunt etiam rectae CA, CR.

COROLLARIUM IV.

299. Similiter si ex tangentium concursu C duca-

catur ad centrum O recta CO; haec bifariam secabit angulum ACR. Quippe junctis OA, OR, in triangulis OAC, ORC quorum commune est latus CO, latera CA, AO aequalia (298) sunt lateribus CR, RO; ergo (83) angulus ACO aequabitur RCO, ideoque CO bifariam secabit angulum ACR.

SCHOLION.

300. Ex hac propositione colligitur intervallum, ad quod se extendit prospectus oculi in superficiem maris. Sit ILS circulus terrae maximus, & HI montis altitudo assurgens ad 1000 passus, quaeraturque intervallum HA, quousque patet prospectus oculi constituti in puncto H. Cum itaque (251) sit SI passuum 7843156, & HI passuum 1000, erit SI passuum 7844156; unde factum ex SH in HI, sive rectangulum SHI erit 7844156000. Sed quia visualis radius HA tellurem tangit in puncto H, quadratum HA (296) aequatur rectangulo SHI; ergo quadratum rectae HA erit 7844156000, cujus radix 88567 dabit passus 88567, seu milliaria 88, & praeterea passus 567. Igitur intra hoc spatium continebuntur objecta omnia, quae ex hoc monte videri possunt, cum caetera ob telluris rotunditatem, ex oculis se subducant. At si HI sit unius passus, quantum ferme assurgit oculus hominis stantis in littore, tunc erit SH passuum 7843157, & HI passus 1; unde rectangulum SHI, seu quadratum HA erit 7843157, cujus radix $2800 \frac{7}{10}$ dabit passus $2800 \frac{7}{10}$, hoc est milliaria 2, & praeterea passus $800 \frac{7}{10}$. Quare si duo homines sex passuum millibus in maris littore distent inter se, ipsi ob telluris rotunditatem se se mutuo non videbunt.

TAB. IX. FIG. 4.

PROPOSITIO XIII.

TAB. VI. FIG. 4. 301. *Si recta CR ita circumferentiae occurrat in puncto R, ut illius quadratum sit aequale rectangulo HCS; recta CR circulum tanget in puncto R.*

Ducta tangente CA, agantur radii OA, OR. Quia (296) tam quadratum tangentis CA, quam quadratum (*ex hyp*) rectae CR aequatur rectangulo HCS; aequabuntur quadrata illa, atque adeo & rectae CR, CA. Sed reliqua etiam latera OR, OC trianguli CRO aequalia sunt lateribus reliquis OA, OC trianguli CAO; ergo & angulus CRO aequabitur (83) alteri CAO. Sed rectus (126) est angulus CAO; ergo rectus quoque erit angulus CRO, ideoque tangens (124) erit CR. Q. E. D.

PROPOSITIO XIV.

TAB. VI. FIG. 5. 302. *Datam rectam LA ita secare in puncto C, ut pars major LC sit media proportionalis inter totam LA, & partem minorem CA.*

Erigatur ad LA perpendicularis LF, aequalis dimidiae LA. Tum centro F, & radio FL describatur circulus LHR, qui ob rectum (*ex constr*) angulum FLA, tangetur ab ipsa LA (124) in L. Demum per A, & F ducta AH, agatur HL, & ipsi parallela RC, quae datam LA secabit, ut petebatur, hoc est LA erit ad LC, ut eadem LC ad CA. Nam quia (*ex constr*) radius LF dimidius est rectae LA, diameter HR aequabitur ipsi LA: sed est LA (295) media proportionalis inter AH, & AR; igitur inter illas media quoque erit proportionalis diameter ipsa HR, unde AH erit ad HR, ut eadem HR ad RA.

Verum

Verum ob parallelas RC, HL, eſt AL ad LC, ut (265) AH ad HR, & LC ad CA, ut (263) HR ad RA; ergo etiam AL erit ad LC, ut eadem LC ad CA. Q. E. F.

PROPOSITIO XV.

303. *Conſtruere triangulum iſoſceles CAH, in quo angulus ad baſim ACH, vel AHC ſit duplus anguli ad verticem A.* TAB. VI. FIG. 6.

Sumatur quaelibet recta AH, quae ita in E (302) ſecetur, ut pars major AE ſit media proportionalis inter totam AH, & partem minorem HE. Tum centro A per H deſcripto circulo HCL, huic inſcribatur HC, aequalis ipſi AE: dico, triangulum CAH quaeſitum eſſe. Nam juncta CE, per puncta C, E, A deſcribatur (159) circulus CEA. Recta AH eſt ad AE, ut (*ex conſtr*) eadem AE ad EH: ſed AC aequalis eſt ipſi AH, & CH ipſi AE; ergo etiam AC erit ad CH, ut AE ad EH, ideoque angulus ACE (273) aequabitur ECH, & propterea angulus ACH erit duplus anguli ECH. Rurſus cum AE, vel HC ſit media proportionalis inter AH, & HE, quadratum HC (248) aequabitur rectangulo AHE; unde HC (301) tanget circulum CEA, quem HA ſecat in E, & A, & ideo angulus ECH aequabitur (140) ipſi A in ſegmento alterno. Vidimus autem angulum ACH duplum eſſe anguli ECH; ergo idem angulus ACH, vel ipſi aequalis AHC duplus quoque erit alterius A. Q. E. F.

PROPOSITIO XVI.

304. *Dato circulo CAL inſcribere Pentagonum ordinatum FCHAL.* TAB. VI. FIG. 7.

 Fiat

Fiat triangulum (303) isosceles, cujus uterlibet ad basim angulus duplus sit anguli ad verticem. Huic aequiangulum (167) FHL inscribatur circulo CAL. Demum ad basim anguli HFL, HLF bisecentur (85) rectis FA, LC, junganturque FC, CH, HA, AL, quae cum recta FL determinabunt pentagonum ordinatum. Nam cum quinque anguli HFA, AFL, FHL, CLF, CLH sint aequales, utique (137) etiam arcus, chordaeque (107) HA, AL, LF, FC, CH debent aequari; pentagonum igitur aequilaterum sit oportet. Est vero etiam (135) aequiangulum, quippe cum ejus anguli CFL, FLA &c. insistant arcubus aequalibus CHAL; FCHA &c., aequari utique debent. Ergo ordinatum erit pentagonum FCHAL. Q. E. F.

SCHOLION I.

305. Generatim polygona regularia imparium laterum circulo inscribuntur ope trianguli isoscelis FHL, cujus alteruter aequalium ad basim angulorum HFL, HLF est triplus, quadruplus &c. anguli ad verticem constituti; veluti si angulus HFL triplus sit anguli FHL, erit FL heptagoni latus; si quadruplus, enneagoni; & sic deinceps. Nam quemadmodum (304) si inscribatur circulo triangulum isosceles FHL, cujus alteruter ad basim angulus fuerit duplus verticalis anguli FHL, angulorum ad basim bisectorum partes, una cum angulo verticali insistunt arcubus quinque, qui aquales sunt totius circumferentiae partes, ideoque basis FL est latus pentagoni ordinati: ita si inscribatur circulo triangulum isosceles FHL, cujus alteruter ad basim angulus fuerit triplus verticalis anguli FHL, angulorum ad basim trisectorum partes, una cum angulo verticali insistent arcubus septem, qui aequales erunt to-

totius circumferentiae partes, ideoque basis FL latus erit heptagoni ordinati eidem circulo inscribendi. Pari modo constabit de reliquis.

SCHOLION II.

306. Nondum vero methodus est inventa ope solius circini, & regulae triangulum isosceles describendi, cujus uterlibet ad basim angulus sit triplus, quadruplus &c. anguli ad verticem constituti. Imo per solam Geometriam elementarem adhuc non licet (185) dividere quemvis angulum in 3, 5, 6, 7, 9 &c. partes aequales; ergo neque etiam licebit inscribere dato circulo heptagonum, enneagonum, & alia polygona regularia imparium laterum.

SCHOLION III.

307. Practice autem quodvis ordinatum polygonum circulo inscribetur, si circumferentia in tot aequas partes divisa, quot latera sunt polygoni inscribendi, ducantur rectae divisionum puncta jungentes, quae determinabunt quaesitum polygonum ordinatum.

CAPUT IV.

De rectarum linearum potentiis, seu quadratis super illas descriptis.

PROPOSITIO XVII.

308. *Si ab angulo recto F trianguli rectanguli AFC demittatur ad AC perpendicularis FO; erit* 1.° *quadratum FC aequale rectangulo ACO;* 2.° *quadratum* TAB. VI. FIG. 8.

FA aequabitur rectangulo CAO; 3.° *quadratum FO rectangulo AOC erit aequale*.

I. Quia rectus est (*ex hyp*) angulus FOA, circulus supra FA tamquam diametro descriptus, transibit (172) per punctum O. Cum vero rectus sit quoque angulus AFC, utique FC perpendicularis erit ad diametrum FA, ideoque (124) tanget in puncto F circulum FOA, quem secat altera COA, & proinde quadratum FC aequale (296) erit rectangulo ACO.

II. Cum rectus ponatur angulus FOC, circulus supra FC veluti diametro descriptus, transibit (172) per punctum O, ideoque superiori adhibito ratiocinio, demonstrabitur quadratum FA rectangulo CAO esse aequale.

III. Quia rectus est (*ex hyp*) angulus AFC, circulus supra AC tamquam diametro descriptus, transibit (172) per punctum F, ideoque quadratum rectae OF, quae perpendicularis est ad AC, aequale (281) erit rectangulo AOC. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

309. Cum quadratum FC par sit (308) rectangulo ACO, erit (249) AC ad FC, ut eadem FC ad CO; unde FC media erit proportionalis inter duas AC, CO. Eandem ob causam FA media erit inter duas CA, AO, nec non OF media inter duas AO, OC.

COROLLARIUM II.

310. Hinc ad duas rectas AO, OF invenietur tertia proportionalis OC, si iisdem AO, OF ad angulum rectum junctis, ducatur AF, atque ad hanc agatur perpendicularis FC, ipsi AO productae occurrens in puncto C. Est enim (309) AO ad OF, ut OF ad OC.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

311. *In triangulo rectangulo AFC quadratum lateris AC oppositi angulo recto F, aequale est duobus quadratis simul reliquorum laterum FC, FA.* TAB. VI. FIG. 9.

Esto RACH lateris AC quadratum, quod a recta FS perpendiculari ad idem latus AC, dividatur in duo rectangula HCOS, SOAR. Cum in quadrato RACH sint aequales HC, AC, utique rectangulum HCOS aequabitur rectangulo sub rectis AC,CO, hoc est rectangulo ACO. Sed hoc rectangulum ACO aequale (308) est quadrato lateris FC; ergo etiam rectangulum HCOS aequabitur quadrato lateris FC. Simili modo ostendam, reliquum rectangulum SOAR quadrato reliqui lateris FA esse aequale; ergo quadratum RACH aequale erit quadratis simul reliquorum laterum FC, FA. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

312. Itaque si supra latus AH fiat quadratum AFCH, agaturque diagonalis FH; hujus quadratum duplum erit quadrati lateris AH. Quippe FH quadratum cum aequale sit (311) quadratis aequalium laterum AH, AF, duplum quoque erit quadrati lateris AH. TAB. VI. FIG. 10.

COROLLARIUM II.

313. Quare determinato in numeris latere AH, nullus numerus erit, qui exprimat diagonalem FH. Si enim latus AH sit 2, ejus (194) quadratum erit 4, unde quadratum (312) diagonalis FH erit 8. Si ergo diagonalis FH aliquo posset numero designari, is sane hujusmodi esset, ut in se ipsum ductus efficeret 8. Constat vero nullum numerum esse, qui

in

in se ipsum ductus efficiat 8; ergo nullus quoque numerus erit, qui exprimat diagonalem FH.

COROLLARIUM III.

314. Ergo unitas, quae mensura est lateris AH, nequit mensura esse diagonalis FH, ideoque quadrati latus AH incommensurabile (57) erit diagonali FH.

COROLLARIUM IV.

TAB. VI. FIG. 11. 315. Si recta AC secta sit utcumque in S; duo rectangula sub tota AC, & partibus CS, SA comprehensa, quadrato totius aequalia sunt. Descripto enim semicirculo AHC, erectaque ex S perpendiculari SH, jungantur AH, CH. Cum rectus sit (144) in semicirculo angulus AHC, quadratum A aequabitur (311) quadratis simul HC, HA. Sed HC quadratum aequatur (308) rectangulo ACS, & quadratum HA rectangulo CAS; ergo quadratum AC aequabitur rectangulis ACS, CAS simul sumptis.

COROLLARIUM V.

316. Rectangulum quoque sub tota AC, & partium alterutra CS comprehensum, aequale est rectangulo sub partibus AS, SC, una cum quadrato praedictae partis CS. Nam rectangulum sub AC, & CS aequatur (308) quadrato HC, seu quadratis (311) simul HS, CS, sive (308) rectangulo ASC, una cum quadrato CS.

COROLLARIUM. VI.

317. Pariter totius AC quadratum aequale est quadratis partium AS, SC, una cum duplo rectanguli ASC sub iisdem partibus comprehensi. Quadratum quippe AC aequale est (311) quadratis HC, HA: sed quadratum HC aequatur (311) quadratis SC, SH, & quadratum HA aequatur (311) quadratis

tis

tis AS, SH; ergo quadratum AC aequabitur quadratis AS, SC, una cum duplo quadrati SH, ſive una cum duplo (308) rectanguli ASC.

COROLLARIUM VII.

318. Imo ſi AC ſecta fuerit aequaliter in R, & inaequaliter in S, quadratum dimidiae RC aequabitur quadrato intermediae RS, una cum rectangulo ASC a partibus inaequalibus comprehenſo. Nam quadratum RH aequale eſt (311) quadratis ſimul RS, SH, hoc eſt quadrato RS, una cum (308) rectangulo ASC; ergo etiam quadratum RC aequabitur eidem RS quadrato, una cum rectangulo ASC.

COROLLARIUM VIII.

319. Si vero AC ſit bifariam ſecta in E, eique recta quedam adiiciatur CS; quadratum ES compoſitae ex dimidia, & adjecta, aequabitur quadrato dimidiae EC, una cum rectangulo ASC. Deſcripto enim ſemicirculo AOC, agatur tangens SO, & jungatur OE. Cum (126) rectus ſit angulus EOS, quadratum ES aequabitur (311) quadratis EO, OS, ſeu quadratis EC, OS. Sed quadratum tangentis OS aequale eſt (296) rectangulo ASC; ergo etiam quadratum ES aequabitur quadrato EC, una cum rectangulo ASC. TAB. VI. FIG. 12.

PROPOSITIO XIX.

320. *Si ſupra baſim AS trianguli acutanguli, aut obtuſanguli AVS, deſcribatur ſemicirculus ARS, occurrens rectis VS, VA in punctis L, & R; quadratum AS aequabitur duobus ſimul rectangulis VSL, VAR* TAB. VI. FIG. 13. 14.

Demiſſa ad AS perpendiculari VE, jungatur AL.

AL. Quia in triangulis ALS, VES anguli ALV, AEV (*ex constr*) sunt recti, utique circulus diametro AV descriptus, transibit (172) etiam per puncta E, & L, ideoque rectangulum ASE aequabitur (297) alteri VSL. Similiter ob rectos angulos VRS, VES, circulus diametro VS descriptus, transibit (172) etiam per R, & E, atque adeo rectangulum SAE aequale erit (297) alteri VAR. Ergo rectangulum ASE, una cum rectangulo SAE, hoc est quadratum (315) totius AS aequabitur duobus simul rectangulis VSL, VAR Q. E. D.

PROPOSITIO XX.

TAB. VI. FIG. 13.

321. *Si in triangulo acutangulo AVS demissa sit ad VS perpendicularis AL; quadratum lateris AS oppositi acuto angulo AVS, una cum duplo rectanguli SVL aequabitur quadratis reliquorum laterum VA, VS.*

Quadratum VA aequale (315) est rectangulis VAR, AVR, sicuti & quadratum VS aequatur (315) rectangulis VSL, SVL; ergo duo quadrata VA, VS aequantur quatuor rectangulis VAR, VSL, AVR, SVL. Sed duo rectangula VAR, VSL aequantur (320) quadrato AS, & reliqua duo AVR, SVL utpote (297) aequalia, aequantur duplo rectanguli SVL; ergo duo quadrata VA, VS aequantur quadrato AS, una cum duplo rectanguli SVL. Q. E. D.

COROLLARIUM

322 Igitur quadratum lateris AS oppositi acuto angulo AVS, minus est quadratis simul laterum reliquorum.

PROPOSITIO XXI.

TAB. VI. FIG. 14.

323. *Si in triangulo obtusangulo AVS demissa sit ad VS perpendicularis AL; quadratum lateris*

AS

AS oppositi obtuso angulo AVS, aequabitur quadratis reliquorum laterum VS, VA, una cum duplo rectanguli LVS.

Quadratum lateris AS aequale est (320) rectangulis VSL VAR, sive rectangulis LSV, RAV. Sed rectangulum LSV aequale (316) est quadrato VS, una cum rectangulo LVS, & rectangulum RAV aequatur (316) quadrato AV, una cum rectangulo RVA; ergo quadratum lateris AS aequabitur quadratis VS, VA, una cum rectangulis LVS, RVA. Sed rectangulum LVS aequatur (280) alteri RVA, ergo quadratum lateris AS aequabitur quadratis VS, VA, una cum duplo rectanguli LVS. Q. E. D.

COROLLARIUM

324. Igitur quadratum lateris AS oppositi obtuso angulo AVS, majus est quadratis simul laterum reliquorum.

PROPOSITIO XXII.

325. *Si in triangulo AFC quadratum lateris AC aequale sit quadratis simul laterum reliquorum AF, FC; rectus erit angulus F, cui opponitur idem latus AC.* TAB. VI. FIG. 9.

Angulus F obtusus esse nequit; si enim ita esset, utique quadratum AC majus esset (324) quadratis simul laterum AF, FC, contra hypothesim. Sed neque acutus esse potest idem angulus F, alioquin quadratum idem AC minus esset (322) quadratis simul AF, FC, rursus contra hypothesim. Cum ergo neque obtusus, que acutus sit angulus F, necesse est ut sit rectus. Q. E. D.

CA-

CAPUT V.

De parallelogrammorum, Triangulorum, & Figurarum similium proportione.

PROPOSITIO XXIII.

TAB. VI. FIG. 15. 16. 326, *Parallelogrammum quodcumque ACFH est ad aliud VEGS in ratione composita ex ratione basis AH ad basim VS, & ex ratione altitudinis CL ad altitudinem EO.*

Ratio composita basis AH ad basim VS, & altitudinis CL ad altitudinem EO est illa, quam habet (235) factum ex antecedentibus, nimirum ex basi AH in altitudinem CL, ad factum ex consequentibus, nempe ex basi VS in altitudinem EO. Sed area parallelogrammi ACFH aequatur facto (201) ex basi AH in altitudinem CL, & area parallelogrammi VEGS aequatur facto ex basi VS in altitudinem EO; ergo ratio composita basis AH ad basim VS, & altitudinis CL ad altitudinem EO eadem erit cum ratione parallelogrammi ACFH ad aliud VEGS. Haec ergo pallelogramma inter se erunt in eadem composita ratione. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

327. Cum triangula ACH, VES dimidia (176) sint parallelegrammorum ACFH, VEGS; utique triangula erunt, ut parallelogramma, atque idcirco in ratione composita ex ratione basis AH ad basim VS, & ex ratione altitudinis CL ad altitudinem EO.

Co-

COROLLARIUM II.

328. Pariter cum rectangula F, L sint (150) parallelogramma, etiam F erit ad L in ratione composita ex ratione basis A ad basim C, & ex ratione altitudinis S ad altitudinem H. TAB. VI. FIG. 17. 18.

COROLLARIUM III.

329. Quoniam quadrata F, L sunt (46) rectangula, etiam quadratum F erit ad quadratum L in ratione composita ex ratione basis AC ad basim EH, & ex ratione altitudinis BC ad altitudinem GH. TAB. VI. FIG. 20. 21.

COROLLARIUM IV.

330. Et quia in iisdem quadratis F, L ratio basis AC ad basim EH aequatur rationi altitudinis BC ad altitudinem GH; ideo quadratum F erit (236) ad aliud L in ratione duplicata rationis AC ad EH, vel rationis BC ad GH.

COROLLARIUM V.

331. Hinc ratio duplicata duarum rectarum AC, EH eadem prorsus erit ac ratio quadratorum F, L super easdem rectas veluti latera descriptorum.

PROPOSITIO XXIV.

332. *Si dentur tres rectae quaelibet A, C, E, prima A erit ad tertiam E in ratione composita ex duabus rationibus intermediis, nimirum ex ratione primae A ad secundam C, & ex ratione secundae C ad tertiam E.* TAB. VI. FIG. 17. 18. 19.

Super extremas A, & E fiant rectangula F, & V, quorum altitudines S, & O aequales sint mediae C. Dein super mediam quoque C fiat rectangulum aliud

aliud L, cujus altitudo H aequalis sit tertiae E. Cum ergo (*ex constr*) sit C ad E, ut O ad H, rectangulum L sub extremis aequabitur (245) rectangulo V sub mediis; unde rectangulum F erit ad aliud V, ut idem rectangulum F ad rectangulum L. Sed rectangulum F est ad aliud V, ut (243) A ad E, & rectangulum F est ad aliud L in ratione (328) composita ex rationibus A ad C, & S ad H; ergo etiam A erit ad E in ratione composita ex rationibus A ad C, & S ad H. Sed rectae S, & H aequales sunt (*ex constr*) ipsis C, & E; ergo etiam A erit ad E in ratione composita ex rationibus A ad C, & C ad E. Q. E. D.

COROLLARIUM.

TAB. IX. FIG. 5. 6.

333. Novimus inde rationem unius parallelogrammi ad alterum rectis lineis exhibere. Sunto enim parallelogramma AE, FG, quorum bases AD, EL, altitudines vero BC, HM: dico, quod si fiat, ut altitudo BC ad altitudinem HM, ita basium altera FL ad quartum terminum proportionalem N, erit parallelogrammum AE ad aliud FG, ut illius basis AD ad quartam inventam N. Nam parallelogrammum AE est (326) ad aliud FG in ratione composita ex rationibus AD ad FL, & BC ad HM: sed ratio BC ad HM eadem est (*ex constr*) ac ratio FL ad N; ergo parallelogrammum AE erit ad aliud FG in ratione composita ex rationibus AD ad FL, & ejusdem FL ad N, hoc est (332) erit, ut AD ad N.

PROPOSITIO XXV.

TAB. IX. FIG. 7. 8.

334. *Aequalia parallelogramma reciprocant bases, & altitudines. Et si reciprocant bases, & altitudines, sunt aequalia.*

I. Sint

I. Sint parallelogramma aequalia AE, FG, quorum bases AD, FL, altitudines vero BC, HM: dico, AD esse ad FL, ut HM ad BC. Fiat enim ut BC ad HM, ita FL ad N, eritque (333) parallelogrammum AE ad aliud FG, ut AD ad N: sed parallelogrammum AE aequatur alteri FG (*ex hyp*); ergo etiam AD aequabitur in N, unde AD erit (222) ad FL, ut N ad FL. Sed quia BC est ad HM ut FL ad N (*ex constr*), etiam invertendo, HM erit ad BC, ut N ad FL; ergo AD quoque erit (226) ad FL ut HM ad BC.

II. Sit modo AD ad FL, ut HM ad BC: dico, parallelogrammum AE esse alteri FG aequale. Nam fiat, ut BC ad HM, ita FL ad N, eritque invertendo, ut HM ad BC, ita N ad FL. Sed AD est (*ex hyp*) ad FL, ut HM ad BC; ergo etiam AD erit ad FL, ut N ad FL, ideoque (225) AD aequabitur ipsi N. Sed parallelogrammum AE est (333) ad aliud FG, ut AD ad N; ergo & parallelogrammum AE aequabitur alteri FG. Q. E. D.

COROLLARIUM.

335 Quia triangula ABD, FHL sunt (176) medietates parallelogrammorum AE, FG, easdemque cum hisce habent bases, & altitudines; patet, triangula aequalia ABD, FHL reciprocare bases, & altitudines & si reciprocent bases, & altitudines, esse aequalia.

PROPOSITIO XXVI.

336. *Quaelibet triangula similia ABD, EFH sunt inter se, ut quadrata homologorum laterum AD, EH.* TAB. V. FIG. 17. 18.

Ex aequalibus angulis B, & F demittantur ad homologa latera AD, EH perpendiculares BC, FG,

quae referent altitudines triangulorum ABD, EFH habentium pro basibus latera AD, EH. Triangulum ABD est ad triangulum EFH (327) in ratione composita ex rationibus AD ad EH, & BC ad FG: sed ratio AD ad EH aequatur (277) rationi BC ad FG; ergo triangulum ABD erit quoque ad triangulum EFH (236) in ratione duplicata AD ad EH, sive (331) ut quadratum AD ad quadratum EH. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

TAB. VI. FIG. 15. 16. 337. *Similia parallelogramma AF, VG sunt inter se, ut quadrata laterum homologorum AH, VS.*

Quoniam parallelogramma AF, VG sunt (*ex hyp*) similia inter se, circa aequales angulos A, & V habebunt (238) latera AC, VE proportionalia lateribus AH, VS, & propterea si ducantur diagonales CH, ES, prodibit (285) triangulum ACH simile alteri VES, unde triangulum ACH erit (336) ad triangulum VES, ut quadratum AH ad quadratum VS. Sed parallelogrammum AF est ad parallelogrammum VG, ut triangulum ACH ad triangulum VES; ergo & parallelogrammum AF erit ad parallelogrammum VG, ut quadratum AH ad quadratum VS. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVIII.

TAB. VI. FIG. 22. 338. *Si tres rectae A, E, F fuerint continue proportionales; prima A erit ad tertiam E, ut quadratum primae A ad quadratum secundae E, vel ut quadratum secundae E ad quadratum tertiae F.*

Prima A est ad tertiam E in ratione composita (332)

(332) ex rationibus intermediis A ad E, & E ad F: sed propter A, E, F (*ex hyp*) continue proportionales, ratio A ad E aequatur rationi E ad F; ergo prima A erit ad tertiam F in ratione (236) duplicata primae A ad secundam E, vel secundae E ad tertiam F, hoc est ut (331) quadratum A ad quadratum E, vel ut quadratum E ad quadratum F. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

339. *Si quatuor rectae A, E, C, H fuerint proportionales; illarum quoque quadrata proportionalia erunt. Et contra si proportionalia fuerint quadrata rectarum A, E, C, H; rectae quoque proportionales invicem erunt.* TAB. IV. FIG. 15.

I. Fiat ut A ad E, ita (310) E ad R, & ut C ad H, ita H ad F; eritque E ad R, ut A ad E, vel (*ex hyp*) ut C ad H, sive (*ex constr*) ut H ad F. Igitur A est ad E, ut C ad H, & E est ad R, ut H ad F; unde ex aequo, A erit ad R, ut C ad F. Sed (338) A est ad R, ut quadratum A ad quadratum E, & (338) C est ad F, ut quadratum C ad quadratum H; ergo etiam quadratum A erit ad quadratum E, ut quadratum C ad quadratum H.

II. Si rectae A, E, C, H non sint proportionales, fiat (268) ut A ad E, ita C ad aliam F; eritque ut quadratum A ad quadratum E, ita (*num. I.*) quadratum C ad quadratum F. Sed etiam ut quadratum A ad quadratum E, ita (*ex hyp*) est quadratum C ad quadratum H; ergo (226) quadratum C erit ad quadratum F, ut idem quadratum C ad aliud quadratum H, ideoque aequantur quadrata rectarum F, H, ac proinde etiam ipsae rectae aequales erunt. Sed A est ad E, ut (*ex constr*) C ad F; ergo etiam A erit ad E, ut C ad H. Q. E. D.

PROPOSITIO XXX.

TAB. VI. FIG. 23. 24. 340. *Polygona similia ARCVE, FILSH sunt, ut quadrata homologorum laterum EV, HS.*

Ex aequalibus angulis A, F agantur diagonales AV, AC, FS, FL; eruntque singula triangula K, O, G similia (291) singulis P, Z, T. Itaque cum polygona sint (*ex hyp*) similia, erit (238) EV ad HS, ut VC ad SL, & (339) quadratum EV ad quadratum HS, ut quadratum VC ad quadratum SL. Sed (336) triangulum K est ad sibi simile P, ut quadratum EV ad quadratum HS, & triangulum O est ad sibi simile Z, ut quadratum VC ad quadratum SL; ergo etiam triangulum K erit ad P, ut O ad Z. Eodem modo ostendam, ut O est ad Z, ita G esse ad T; igitur (259) summa antecedentium K, O, G, seu polygonum ARCVE erit ad summam consequentium P, Z, T, seu ad polygonum FILSH, ut unum, antecedens K ad consequens suum P, seu (336) ut quadratum EV ad quadratum HS. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

TAB. VI. FIG. 25. 26. 341. Cum polygona ordinata AEFHL, RZGKI mutuo (238) sint similia, erunt quoque ut quadrata (340) suorum laterum.

COROLLARIUM II.

TAB. VI. FIG. 23. 24. 342. Si similium polygonorum homologa latera EV, HS fuerint nota, etiam polygonorum ratio innotescet. Si enim EV sit ex. gr. sex pedum, & duorum pedum HS, utique polygona erunt, ut horum numerorum quadrata, nempe ut triginta sex ad quatuor, sive ut novem ad unum.

Co-

COROLLARIUM III.

343. Cum quatuor rectarum proportionalium, proportionalia sint (339) quadrata, etiam polygona similia, similiterque a quatuor proportionalibus descripta, proportionalia (340) invicem erunt.

PROPOSITIO XXXI.

344. *Polygona ordinata AEFHL, KZGKI circulis circumscripta, sunt inter se ut quadrata radiorum.* TAB. VI. FIG. 25. 26.

Ductis ad puncta contactuum radiis CO, VS, qui perpendiculares (126) erunt ad rectas AE, RZ, jungantur CA, CE, VR, VZ. Quia rectae AC, RV bisecant aequales (299) angulos EAL, ZRI, angulus EAC aequabitur ZRV. Eamdem ob causam angulus AEC aequalis erit alteri RZV. Igitur similia (275) erunt triangula ACE, RVZ, quorum bases sunt rectae AE, RZ, altitudines autem radii CO, VS, ideoque (277) AE erit ad RZ, ut CO ad VS, & (339) quadratum AE erit ad quadratum RZ, ut quadratum CO ad quadratum VS. Sed polygonum AEFHL est (341) ad aliud RZGKI, ut quadratum AE ad quadratum RZ; ergo polygonum primum ad alterum quoque erit, ut quadratum CO ad quadratum VS. Q. E. D.

COROLLARIUM.

345. Cum polygona ordinata circulis circumscripta, in circulos (212) abeant, si eorum laterum numerus augeatur in infinitum, & eorum magnitudo minuatur in infinitum; patet, circulos quoque esse, ut radiorum quadrata, aut etiam ut quadrata diametrorum.

PROPOSITIO XXXII.

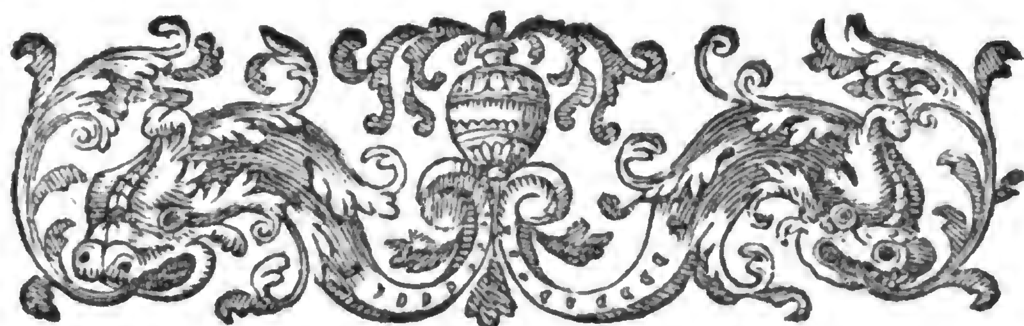
TAB. VI. FIG. 25. 26. 346. *Polygona ordinata AEFHL, RZGKI circulis circumscripta, ambitus habent proportionales radiis CO, VS.*

Cum ordinata polygona sint (238) similia, AE erit ad RZ, ut EF ad ZG, & ut FH ad GK, & sic semper; ergo omnium antecedentium summa, nempe ambitus polygoni AEFHL erit ad summam consequentium, nempe ad ambitum polygoni RZGKI, ut antecedens (259) unum AE ad consequens suum RZ. Sed AE est ad RZ, ut (277) radius CO ad radium OS; ergo etiam ambitus polygoni AEFHL erit ad ambitum alterius RZGKI, ut radius CO ad radium VS. Q. E. D.

COROLLARIUM.

347. Cum polygona ordinata AEFHL, RZGKI abeant in (212) circulos, & illorum ambitus in circumferentias degenerent, si laterum numerus augeatur in infinitum, & eorum magnitudo minuatur in infinitum; liquet (346), circulorum quoque circumferentias proportionales esse radiis CO, VS, aut etiam diametris eorundem.

PARS



PARS TERTIA

DE SOLIDORUM SYMPTOMATIS ET MENSURIS.

CAPUT I.

De principiis Solidorum.

DEFINITIO I.

348.  Inea recta FE est ad planum ABCD *recta*, aut *perpendicularis*, cum ad rectas omnes lineas EB, EC, ED, EA eodem in plano ductas, a quibus illa tangitur, est perpendicularis. Tab. VI. Fig. 27.

DEFINITIO II.

349. Si linea FG non sit recta ad planum CEOQ, & a sublimi ejus puncto F ad planum ducatur perpendicularis FI, jungaturque GI; angulus FGI dicitur *inclinatio* lineae FG ad idem planum. Tab. VI. Fig. 28.

DEFINTIIO III.

350. Si duo plana ACIH, LSOR se mutuo secent; linea LS utrique plano communis, horum planorum *sectio* appellatur. Tab. VI. Fig. 29.

DEFINITIO IV.

TAB. VI. FIG. 30. 351. Planum GROL *rectum* dicitur, seu *perpendiculare* ad planum CSVE, cum omnes lineae FA, IH, quae communi planorum sectioni GL perpendiculares ducuntur in planorum uno GROL, sunt rectae ad planum alterum CSVE.

DEFINITIO V.

TAB. VI. FIG. 29. 352. Si planum LSOR plano ACIH perpendiculariter non insistat, alterius ad alterum *inclinatio* est acutus angulus GFQ, quem comprehendunt rectae GF, FQ ad communem sectionem LS in utroque plano perpendiculariter ductae.

DEFINITIO VI.

353. *Distantia* puncti a plano est linea brevissima omnium, quae ex illo ad hoc duci possunt.

DEFINITIO VII.

354. *Plana parallela* sunt, quae quantumvis producta, eandem semper servant distantiam inter se.

COROLLARIUM.

355. Plana igitur parallela numquam poterunt convenire; alioquin non eandem ubique servarent distantiam inter se.

DEFINITIO VIII.

TAB. VI. FIG. 31. 356. Si quaevis figura rectilinea AGR juxta longitudinem rectae AE ita moveatur usque ad EFO, ut sibi ipsi semper maneat parallela; solidum AGROFE inde genitum, vocatur *prisma*; quod dicitur *rectum*, aut *obliquum*, prout recta AE, secundum quam figura generans movetur, vel fuerit perpendicularis, vel obliqua ad ejus planum.

Co-

COROLLARIUM I.

357. Igitur prisma est corpus, cujus latera opposita AGR, EFO sunt aequalia, similia, & parallela. Nam quamprimum figura generans AGR motu sibi semper parallelo lata, descripsit totam longitudinem rectae AE, congruet necessario cum EFO.

COROLLARIUM II.

358. Quia dum planum AGR motu sibi parallelo describit prisma AGROFE, latera AG, GR, RA motu sibi parallelo lata, describunt (152) parallelogramma AEFG, GFOR, ROEA; sequitur, prisma AGROFE tot parallelogrammis circumcirca terminari, quot sunt latera describentis figurae AGR.

DEFINITIO IX.

359. Si figura generans ASCR fuerit parallelogramum; solidum EC inde genitum *Parallelepipedum* nuncupatur; quod *rectum* dicitur, si AE fuerit perpendicularis ad planum figurae generantis ASCR; sin minus, *obliquum*. TAB. VII. FIG. 1.

COROLLARIUM I.

360. Parallelepipedum itaque erit corpus, cujus opposita latera ASCR, EFGO sunt (357) aequalia, similia, & parallela.

COROLLARIUM II.

361. Hinc sex parallelogrammis parallelepipedum terminatur. Ultra enim duo opposita ASCR, EFGO, sunt etiam quatuor alia a parallelo motu (152) laterum AS, SC, CR, RA generata.

COROLLARIUM III.

362. Quia idem parallelepipedum EC gigni eti-

am

am posse concipitur ex motu parallelogrammi AEFS supra immotam rectam AR, vel ex motu parallelogrammi AEOR supra immotam rectam AS; sequitur, latera opposita AEFS, ROGC, nec non AEOR, SFGC aequalia (360) mutuò esse, similia, & parallela.

DEFINITIO X.

TAB. VII. FIG. I. 363. Si fuerit quadratum figura generans ASCR, & recta AE secundum quam movetur, nedum sit perpendicularis ad ejus planum, sed etiam aequalis lateri ejus AR solidum inde genitum vocatur cubus, cujus latus est idem cum latere AR quadrati ASCR.

COROLLARIUM

364. Cubus igitur sex quadratis aequalibus terminatur, quorum duo opposita sunt etiam invicem parallela.

SCHOLION I.

365. *Mensura solidorum.* est cubus, cujus latus est perticae aequale, diciturque *pertica cubica.* Haec autem dividitur in pedes cubicos, & pes cubicus in digitos cubicos, & sic semper. Summa autem omnium perticarum, pedum, digitorum &c. cubicorum, qui in aliquo corpore continentur, reprehesentat ejus *soliditatem*, aut magnitudinem spatii, ab ejus superficie comprehensi.

SCHOLION II.

366. Et sane, sicuti mensura superficierum est quadratum, ita mensura solidorum est cubus. Si quis enim vellet ope perticae solidum mensurare, adhiben-

bendum ab ipso foret solidum unius perticae : atqui nequit excogitari solidum unius perticae, nisi etiam solidum concipiatur, quod ubivis in longum, latum, & profundum habeat unam perticam, seu nisi pertica cubica concipiatur; ergo adhibenda ab ipso est pertica cubica. Idem de pedibus, atque digitis est dicendum.

DEFINITIO XI.

367. *Centrum* cubi GL est punctum I intra illum, quod a sex quadratis cubum terminantibus aequidistat. TAB. VIII. FIG. 17.

DEFINITIO XII.

368. *Piramis* AFEC est solidum tot planis triangulis ad punctum C convenientibus terminatum, quot latera sunt baseos AFE. TAB. VII. FIG. 2.

DEFINITIO XIII.

369. *Angulus solidus* C ille est, qui continetur pluribus planis angulis in apicem unum coeuntibus. Hujusmodi sunt apices pyramidum, prismatum &c.

DEFINITIO XIV.

370. Anguli solidi sunt aequales, qui angulis planis numero, & magnitudine aequalibus continentur. TAB. VI. FIG. 17. 18. 19.

COROLLARIUM.

371. Itaque si angulus unus solidus ita poni intelligatur intra alterum sibi aequalem, ut unius vertex supra alterius verticem cadat; tunc singuli plani anguli qui sibi mutuò sunt aequales, necessario (20) congruent inter se, ideoque & anguli solidi congruant oportebit.

De-

DEFINITIO XV.

TAB. VII. FIG. 3. 372. Si extra planum alicujus circuli ASE acceptum fuerit punctum R, ab eoque ducatur indefinita RAF tangens circulum in A, quae puncto A fixo manente, circa peripheriam circuli convertatur donec in eum locum RAF redeat, unde moveri coeperat; superficies a recta linea RAF descripta *conica* appellatur; solidum vero, quod a superficie, & circulo ASE continetur, *conus* vocatur.

DEFINITIO XVI.

373. *Axis* coni est recta RC ex vertice R ad baseos centrum ducta, quae si perpendicularis sit ad basim ASE, conum *rectum* efficiet; sin minus *obliquum*.

DEFINITIO XVII.

TAB. VII. FIG. 4. 374. Si rectangulum ASHC circa immotam HC in orbem ducatur, donec ad eum redeat locum, unde moveri coepit; solidum SR inde genitum *Cylindrus* dicitur. Cylindri *axis* est immota recta HC, quae si perpendicularis sit ad basim AVR, cylindrum efficit *rectum*; sin minus *obliquum*.

DEFINITIO XVIII.

TAB. VII. FIG. 5. 375. Si semicirculus ARS rotetur circa immotam diametrum ACS, integra facta revolutione, producit solidum *sphaera* dictum, & ejus semiperipheria ARS generat superficiem, quae *sphaerica* nuncupatur.

COROLLARIUM

376. Quoniam dum rotatur semicirculus ARS, singula puncta ejus dimidiae circumferentiae aequaliter semper distant a centro C; singula quoque puncta superficiei sphaericae ab illa genitae, aequidistabunt a cen-

a centro C, quod proinde erit etiam centrum ſphaerae. Igitur omnes rectae ex centro C ad ſuperficiem ſphaerae ductae, mutuo ſunt aequales, & ideo ſphaerae *radii* appellantur.

DEFINITIO XIX.

377. *Similes* coni, & cylindri ſunt, quorum axes ſunt diametris baſium proportionales, ac praeterea vel ſunt perpendiculares ad eaſdem baſes, vel ſunt ad illas aequaliter inclinati.

DEFINITIO XX.

378. Figurae ſolidae rectilineae ſunt *ſimiles* inter ſe, quae ſimilibus planis multitudine aequalibus continentur.

DEFINITIO XXI.

379. Solidae autem figurae rectilineae ſunt mutuo *ſimiles*, & *aequales*, quae ſimilibus planis multitudine, & magnitudine aequalibus continentur.

CAPUT II.

De planorum concurſu inter ſe, & cum lineis rectis.

PROPOSITIO I.

380. *Si per punctum F ducatur recta EF in uno plano ACIH, recta vero FG in altero LSOK; linea EFG non erit recta.* TAB. VI. FIG. 29.

Cum recta EF ſit in plano ACIH, hac ſane, ut libet, ad Q producta, prodibit (63) recta linea EFQ. Ergo ſi recta quoque foret linea EFG, duae rectae

rectae EFQ, EFG transirent per duo puncta E, & F, quin mutuo coinciderent, quod est (14) absurdum. Linea ergo EFG non erit recta. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

381. Igitur rectae lineae pars una nequit esse in uno plano, pars vero altera in alio; alioquin recta (380) non esset linea, contra hypothesim. Ergo in illo plano, in quo est pars una lineae rectae, tota quoque recta linea sita erit.

COROLLARIUM II.

TAB. VII. FIG. 6.

382. Hinc quodvis triangulum RAC in uno totum est plano. Si enim ejusdem pars una, veluti SAH, esset in uno plano, reliqua vero RSHC in altero; utique rectae AR pars una foret in uno plano, reliqua vero SR in altero, quod est (381) absurdum.

COROLLARIUM III.

283. Igitur tria latera cujusvis trianguli in eodem prorsus jacebunt (382) plano, atque adeo per ipsa semper transire poterit planum, idque unicum.

COROLLARIUM IV.

TAB. VII. FIG. 7.

384. Pariter duae rectae CA, FS se secantes in puncto R, erunt positae in uno plano. Nam juncta CS, rectae CR, RS sunt in plano (383) trianguli CRS; ergo etiam totae CA, FS in eodem (381) trianguli plano erunt, ac proinde in uno plano jacebunt.

COROLLARIUM V.

385. Ergo per duas rectas in aliquo puncto invicem concurrentes, semper transire (384) poterit planum, idque unicum.

PRO-

PROPOSITIO II.

386. *Recta HI secans binas AG, FS positas in eodem plano; in uno erit cum illis plano.* TAB. VII. FIG. 8.

Quia recta HI aliam AG secat, utique in eodem erit cum illa (384) plano. Similiter eadem HI secans quoque aliam FS, erit (384) cum illa in eodem plano; ergo HI erit in plano rectae AG, & in plano rectae FS. Sed rectae AG, FS sunt [*ex hyp*] in uno plano; ergo etiam HI in uno erit cum illis plano. Q. E. D.

COROLLARIUM.

387. Cum binae parallelae in uno semper esse debeant (26) plano; liquet, quamcumque rectam binas parallelas secantem, in uno esse cum illis plano.

PROPOSITIO III.

388. *Si duo plana AS, VE se mutuo secent; communis sectio CF linea recta erit.* TAB. VII. FIG. 9.

Si sectio communis CF non sit linea recta, utique ex puncto C ad aliud F duci poterit in plano AS recta (62) linea COF. Similiter ex puncto C ad aliud F ducere licebit in plano VE rectam (62) lineam CHF; igitur duae rectae COF, CHF transibunt per duo puncta C, & F, quin mutuo coincidant, quod est (14) absurdum. Quare sectio CF linea recta erit. Q. E. D.

COROLLARIUM.

389. Hinc binae rectae EI, EO ex eodem puncto E ductae, nequeunt esse perpendiculares ad idem pla- TAB. VII. FIG. 10.

planum GH. Nam ambae si fieri potest, ad idem planum sint rectae. Ergo si per ipsas ducatur (385) planum GIOE, id priori occurret in (388) recta GE, rectusque (348) erit tam angulus OEG, quam IEG; unde angulus OEG aequabitur IEG, totum parti, quod est absurdum.

PROPOSITIO IV.

TAB. VII. FIG. 11. 390. *Planum EFHG secans parallela plana AS, CR, in iis facit sectiones EF, GH invicem parallelas.*

Si fieri potest, rectae EF, GH non sint mutuo parallelae; ergo cum ambae sint in eodem secante plano EFHG, necessario alicubi (155) in I convenient. Sed quia rectae EF, GH sunt in planis AS, CR, etiam totae EFI, GHI in eisdem planis (381) productis erunt; ergo haec quoque plana in I convenient, quod est (355) absurdum. Parallelae ergo erunt EF, GH. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

TAB. VII. FIG. 12. 391. *Binae rectae quaecumque IG, OM a planis parallelis EF, CD, AB secantur in eadem ratione in H, & L.*

Ducta OK ad IG parallela, conveniente cum planis CD, AB in punctis N, & K, jungantur IO, HN, GK, quae erunt invicem parallelae (390), cum sint sectiones planorum parallelorum cum plano OIGK; unde quadrilatera OIHN, NHGK erunt parallelogramma, quorum proinde latera ON, NK aequabuntur (176) lateribus IH, HG. Pariter si jungantur NL, KM, hae erunt etiam (390) mutuo parallelae, quia sunt sectiones

nes plani OKM cum parallelis planis CD, AB. Cum ergo in triangulo OKM ſit NL parallela ad latus ejus KM, erit (262) ON ad NK, ut OL ad LM. Vidimus autem rectas ON, NK aequales eſſe ipſis IH, HG; ergo & IH erit ad HG, ut OL ad LM. Q. E. D.

LEMMA.

392. *Si ex vertice R trianguli iſoſcelis ARC ducatur ad quodvis punctum baſis AC recta linea RS; quadratum lateris RA aequabitur quadrato RS, una cum rectangulo ASC.* TAB. VII. FIG. 13. 14.

I. Sit recta RS perpendicularis ad baſim AC, quam propterea biſecabit (189) in puncto S. Cum ergo aequentur AS, SC, erit quadratum AS aequale rectangulo ASC; unde addito hinc inde quadrato RS, ſumma quadratorum AS, RS aequabitur quadrato RS, una cum rectangulo ASC. Sed ſumma quadratorum AS, RS aequatur (311) quadrato RA; ergo quadratum RA aequabitur quadrato RS, una cum rectangulo ASC. TAB. VII. FIG. 13.

II. Si vero RS ſecet oblique baſim AC in S, ad hanc demittatur ex R perpendicularis RE, quae (189) biſecabit ipſam in puncto E. Cum itaque recta AC ſit diviſa bifariam in puncto E, & in partes inaequales in puncto S, quadratum AE (318) aequabitur quadrato SE, una cum rectangulo ASC; unde addito hinc inde quadrato RE, ſumma quadratorum AE, RE, ſeu quadratum (311) RA aequabitur quadratis SE, RE, una cum rectangulo ASC, ſeu aequabitur (311) quadrato RS, una cum rectangulo ASC. Q. E. D. TAB. VII. FIG. 16.

I PRO-

PROPOSITIO VI.

TAB. V. FIG. 15. 393. *Si recta quaepiam AC fuerit perpendicularis ad binas OE, SK ductas per punctum C in eodem plano SOKE; etiam perpendicularis erit cuivis alteri VF per idem punctum C in eodem plano traductae.*

Sumptis aequalibus CE, CR, & juncta RE, quae ipsi VF occurrat in puncto H, ducantur AR, AH, AE. Quia duo latera AC, CR trianguli ACR aequantur (*ex constr*) lateribus duobus AC, CE trianguli ACE, & rectus angulus ACR aequalis est recto alteri ACE; etiam reliquum latus AR (106) erit reliquo AE aequale, unde isosceles erit triangulum RAE, ideoque quadratum AH, una cum rectangulo RHE aequabitur (392) quadrato AR, seu (311) quadratis AC, CR. Sed in triangulo (*ex constr*) isoscele RCE quadratum CR aequale est (392) quadrato CH una cum rectangulo RHE; ergo quadratum AH, una cum rectangulo RHE aequabitur quadratis AC, CH, una cum rectangulo RHE, & ablato hinc inde rectangulo RHE, quadratum AH aequabitur quadratis AC, CH, rectusque (325) proinde erit angulus ACH, & AC perpendicularis ad rectam lineam VCF. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

394. Hinc eadem recta AC, quae perpendicularis est ad binas OE, SK, perpendicularis (348) quoque erit plano SOKE, nam est etiam perpendicularis (393) ad singulas alias rectas per punctum C in eodem plano traductas.

Co-

COROLLARIUM II.

395. Unde si aliqua recta AC perpendicularis sit ad tres rectas CE, CD, CF; hae in eodem jacebunt plano. Nam si per duas rectas CE, CD traducto (385) plano ECHB, non sit tertia CF cum illis in hoc plano, traducatur per binas CF, CA alterum planum ACBG, quod priori occurrat (388) in CB recta. Cum itaque recta AC sit (*ex hyp*) perpendicularis ad binas CE, CD erit (394) quoque ad rectam CB normalis, & ideo rectus erit angulus ACB. Sed rectus quoque est (*ex hyp*) angulus ACF; igitur angulus ACB aequabitur ACF, totum parti, quod est absurdum. TAB. VII. FIG. 16.

COROLLARIUM III.

396. Pariter si sphaeram tangat planum QN in O; recta AO ex centro ad contactum ducta, perpendicularis erit ad idem planum. Nam si planum tangens QN, & sphaera secentur duobus planis per radium OA traductis, quae in sphaera producent quidem circulos OGF, ODF, in plano autem QN rectas (388) CV, IS; utique hae tangent circulos OGF, ODF eodem in puncto O, & ideo radius AO perpendicularis (126) erit ad binas CV, IS, & propterea etiam (394) ad planum QN. TAB. VII. FIG. 17.

SCHOLION.

397. Hinc si globus perfecte levigatus incumbat horizontali plano QN pariter levigato, ac tellurem tangenti in O; is non quiescet, nisi fuerit collocatus ad punctum O. Ponatur enim globus ad punctum I, & jungatur AI. In triangulo rectangulo AOI latus AI angulo recto oppositum, majus est (181) quam AO, ideoque globus collocatus ad punctum TAB. VII. FIG. 17.

I, non potest quiescere in hoc loco, sed vi gravitatis indesinenter sollicitatus, debebit descendere versus O, ut ita magis accedat ad centrum terrae.

PROPOSITIO VII.

TAB. VII. FIG. 18. 398. *Ex puncto sublimi O demittere ad planum datum AC perpendicularem OR.*

In plano AC ducta qualibet recta FL, ad hanc ex puncto O demittatur perpendicularis OH. Dein in plano AC excitata ad FL perpendiculari HS, ad hanc demittatur ex puncto O perpendicularis OR: dico, hanc quoque esse perpendicularem ad planum AC. Jungantur enim OL, LR. Quia rectus est (*ex constr*) angulus OHL, quadratum OL aequabitur (311) quadratis OH, HL: sed ob rectum (*ex constr*) quoque angulum ORH, quadratum OH aequale est (311) quadratis OR, RH; ergo quadratum OL aequabitur quadratis OR, RH, HL. Demum ob rectum (*ex constr*) angulum RHL, duo quadrata RH, HL aequantur (311) quadrato RL; ergo quadratum OL aequatur quadratis OR, RL, rectusque (325) proinde erit angulus ORL. Sed rectus quoque factus est angulus ORH; ergo OR perpendicularis est ad binas RL, RH, atque adeo etiam (394) perpendicularis ad planum datum AC. Q. E. F.

PROPOSITIO VIII.

TAB. VI. FIG. 28. 399. *Perpendicularis FI ex quovis puncto F ad planum CO ducta, brevissima est omnium rectarum, quae ex eodem puncto ad idem planum duci possunt.*

Ducatur a puncto F ad planum quaevis alia recta

cta FG, & jungatur GI. Cum FI perpendicularis sit ad planum CO, utique rectus erit (348) angulus FIG, ac proinde acutus (165) alter angulus FGI; unde latus FI erit (181) minus latere alio FG. Simili modo ostendam, perpendicularem FI minorem esse alia quacumque recta a puncto F ad planum ducta; ergo omnium brevissima est FI. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

400. Cum unica tantum recta omnium brevissima demitti queat ex puncto sublimi F ad planum datum CO; unica quoque ex puncto F ad idem planum poterit duci perpendicularis FI.

COROLLARIUM II.

401. Similiter quia distantia puncti F a plano CO est recta brevissima (353) omnium, quae ex illo puncto ad planum duci possunt; sequitur, perpendicularem FI esse distantiam puncti F ab eodem plano CO.

COROLLARIUM III.

402. Quoniam *altitudo* cujusvis solidi CFEA est distantia verticis C a basi FAE; perpendicularis CS ex vertice ad basim ducta, altitudinem solidi exhibebit, TAB. VII. FIG. 2.

COROLLARIUM IV.

403. Cum planorum parallelorum distantiae (354) sint aequales; aequabuntur rectae omnes ex uno plano ad sibi parallelum perpendiculariter ductae

COROLLARIUM. V.

404. Et contra si aequentur rectae omnes ex uno plano ad aliud perpendiculariter ductae; duo haec

plana eandem ubique (401) servabunt distantiam inter se, atque adeo erunt mutuo (354) parallela.

PROPOSITIO IX.

TAB. VII. FIG. 10. 405. *Lineae rectae IG, OE, quae eidem plano CH sunt perpendiculares, sunt quoque invicem parallelae.*

Juncta GE, ad hanc in plano CH ducatur perpendicularis EF aequalis ipsi IG, junganturque EI, FI, FG. Cum in triangulis IGE, GEF duo latera IG, GE aequentur (*ex constr*) duobus FE, EG, & rectus (348) angulus IGE aequalis sit (*ex constr*) recto FEG, liquet reliqua latera IE, GF aequalia (106) etiam esse. Igitur triangula IGF, IEF sunt mutuo aequilatera, ac proinde (83) anguli IGF, IEF aequales. Sed IGF rectus (348) est; ergo rectus quoque erit IEF. Recti autem sunt anguli (*ex constr*) GEF, (348) OEF; ergo FE perpendicularis erit ad tres rectas EG, EI, EO, atque adeo OE est in plano (395) rectarum EI, EG. Sed etiam IG in eodem est plano (382) rectarum EI, EG; ergo rectae IG, OE in eodem sunt plano, quae idcirco ob rectos (348) internos angulos IGE, OEG, erunt (149) mutuò parallelae. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

TAB. VII. FIG. 10. 406. *SI parallelarum IG, OE una IG perpendicularis sit ad planum CH, etiam altera OE perpendicularis erit ad idem planum.*

Per parallelas IG, OE traducto plano GIOE, quod (388) alterum CH secet in recta GE, jungatur IE, quae etiam erit (387) in plano GIOE. Dein in plano

plano CH ducatur ad rectam GE perpendicularis EF, ipsi IG aequalis, junctisque FI, FG, rectus, ut supra (405), ostendetur angulus FEI. Sed rectus est quoque (*ex constr*) angulus FEG; ergo erit FE perpendicularis ad binas EI, EG, atque adeo etiam (394) ad planum GIOE, rectusque proinde erit (348) angulus FEO, sive OEF. Verum ob parallelas IG, OE, & rectum (348) angulum IGE, etiam rectus erit (132) angulus OEG; ergo OE perpendicularis erit ad binas EF, EG, atque adeo etiam (394) ad planum CH. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

407. Hinc ex puncto G ad planum CH excitabitur perpendicularis GI, si ex quolibet puncto O extra planum demissa (398) perpendiculari OE, ad hanc ex puncto G agatur parallela GI.

COROLLARIUM II.

408. Si per FA perpendicularem plano SE, traiiciatur quodvis planum GROL, hoc quoque perpendiculare erit eidem plano. Nam si ex quolibet puncto I plani GROL demittatur ad communem sectionem GL perpendicularis IH, rectus erit angulus IHA. Sed rectus quoque (348) est angulus FAH, quippe FA supponitur ad planum recta; ergo duobus rectis aequantur duo interni anguli IHA, FAH, & proinde parallelae (149) erunt FA, IH. Sed FA est perpendicularis plano SE; ergo etiam IH perpendicularis erit (406) eidem plano, atque idcirco planum GROL perpendiculare (351) erit ad idem planum SE. TAB. VI. FIG. 30.

COROLLARIUM III.

409. Similiter rectae KO, HF eidem GR parallelae, licet non sint cum illa in eodem plano, sunt etiam mutuo parallelae. Nam si in plano parallela- TAB. VII. FIG. 19.

 rum

rum KO, GR ducta AL perpendiculari (112) ad GR, huic ex L excitetur (87) perpendicularis LE in plano parallelarum HF, GR, & jungatur AE; utique GR perpendicularis erit ad binas LA, LE, & ideo etiam (394) ad planum trianguli ALE. Ergo etiam rectae KO, HF, quae sunt eidem GR parallelae, perpendiculares (406) erunt eidem plano, ac proinde etiam mutuo (405) parallelae.

PROPOSITIO XI.

TAB. VII. FIG. 20. 410. *Si eadem recta OE perpendicularis sit ad duo plana MN, RS; plana haec erunt invicem parallela.*

Sumatur in plano MN quodlibet punctum F, atque ex hoc ad planum aliud RS demittatur perpendicularis FH, quae (405) erit ipsi OE parellela, ideoque etiam (406) perpendicularis plano MN. Igitur junctis OF, EH, recti (348) prodibunt quatuor anguli E, H, F, O, unde quadrilaterum EOFH erit (45) rectangulum, & ideo recta FH, quae perpendicularis est plano RS, aequabitur (177) rectae OE perpendiculari similiter ad idem planum. Pari modo ostendam, eidem OE aequari alias rectas omnes a plano MN ad aliud RS perpendiculariter ductas; ergo haec duo plana erunt (404) invicem parallela Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

TAB. VII. FIG. 20. 411. *Si binae rectae mutuo se tangentes OA, OV ad binas alias se mutuo tangentes RI, RQ sint parallelae; etiam plana per ipsas ducta, erunt invicem parallela.*

Ex

Ex O demissa OE perpendiculari (398) ad planum RS, in hoc ducatur EL ipsi RI parallela. Quia OA, EL sunt eidem RI parallelae, utique (409) parallelae quoque inter se erunt, ac proinde duobus rectis aequabuntur (132) interni anguli AOE, OEL. Sed quia OE est recta ad planum RS, rectus esse debet (348) angulus OEL; igitur erit rectus etiam reliquus AOE. Simili modo ducta EH ad RQ parallela, ostendam rectum esse angulum VOE; igitur EO perpendicularis est ad duas OA, OV, atque adeo perpendicularis erit etiam (394) plano MN. Sed perpendicularis est (*ex constr*) quoque plano RS; ergo perpendicularis erit utrique plano, ac proinde plana MN, RS erunt (410) invicem parallela. Q. E. D.

LEMMA.

412. *Si binae rectae OA, OV sint parallelae ad binas RI, RQ in eodem existentes cum illis plano; aequales comprehendent angulos AOV, IRQ.* TAB. VII. FIG. 21.

Ducta per O, & R recta OH, internus angulus AOH aequalis erit (134) externo IRH. Pari modo ostendam, etiam internum angulum VOH aequari externo QRH; ergo totus angulus AOV aequabitur toti IRQ. Q. E. D.

PROPOSITIO XIII.

413. *SI binae rectae OA, OV sint parallelae ad binas RI, RQ non in eodem existentes cum illis plano; aequales comprehendent angulos AOV, IRQ.* TAB. VII. FIG. 20.

Quia binae OA, OV parallelae sunt ad binas RI, RQ, plana per ipsas ducta, erunt (411) mutuo pa-

parallela, unde si ex punctis quibuslibet O, F, G demittantur ad planum RS perpendiculares OE, FH, GL, hae utique (403) aequales erunt, & mutuo (405) parallelae, ac proinde aequales (151) quoque, & parallelae erunt illas jungentes OF & EH, FG & HL, OG & EL. Igitur triangula GOF, LEH sunt mutuo aequilatera, & (83) angulus GOF, sive AOV aequabitur LEH. Jam vero (*ex hyp*) RQ est ad OF parallela, & ad eandem parallela est quoque EH; igitur parallelae erunt (409) etiam RQ, EH. Eodem modo ostendam, parallelas quoque esse RI, EL; ergo angulus LEH (412) aequabitur IRQ. Ostendi autem angulum AOV aequari angulo LEH; ergo etiam aequabitur alteri IRQ. Q. E. D.

CAPUT III.

De Parallelepipedorum, & Prismatum symptomatis principalibus, eorumque soliditatibus.

PROPOSITIO XIV.

TAB. VII. FIG. 22. 414. *In quovis parallelepipedo RH planum transire potest per adversorum planorum diagonales AC, EG.*

In parallelogrammo FRCG est CG parallela (49) ad RF, & in parallelogrammo altero RAEF est AE ad (49) eandem RF parallela; ergo (409) parallelae etiam inter se erunt CG, AE, quae idcirco erunt in uno (26) plano. Atqui in eodem cum illis plano (387) sunt quoque diagonales AC, EG, quae illas secant; ergo per diagonales AC, EG planum transire potest. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XV.

415. *Planum traductum per diagonales AC, EG, parallelepipedum secat in duo prismata aequalia, & similia.* TAB. VII. FIG. 22.

Quia AC secat parallelas AR, LC, angulus RAC aequalis erit (132) alterno ACL. Pari modo constabit, etiam angulum ACR aequari alterno CAL; ergo triangulum ARC, quod (176) est aequale triangulo LAC, etiam simile (275) ipsi erit. Idem dicendum de triangulis EFG, EHG. Sunt vero aequalia, & similia parallelogramma (362) opposita RAEF, CLHG, nec non RCGF, ALHE, & demum parallelogrammum ACGE utrique prismati est commune; ergo prismata ARCGFE, ALCGHE similibus planis multitudine, & magnitudine aequalibus continentur, ac proinde (379) erunt aequalia, & similia. Q. E. D.

COROLLARIUM.

416. Hinc prisma alterutrum ARCGFE dimidium erit parallelepipedi RH.

PROPOSITIO XVI.

417. *Parallelepipeda FPKHLOGA, FRQHLVEA, quae eandem habent basim AFHL, & eandem pariter altitudinem, ac proinde existunt inter parallela plana AFHL, GPQV, sunt aequalia inter se.* TAB. VII. FIG. 23.

Parallepipedum FPKHLOGA in duo alia dividatur ope plani SCRE adversis planis AFPG, LHKO paralleli, junganturque RH, EL. Prisma FRCSEA dimidium est (416) parallelepipedi FPRCSEGA. Similiter prisma CRHLES dimidium est (416) parallelepi-

lepipedi CRKHLOES; ergo totum prisma FRHLEA dimidium erit parallelepipedi FPKHLOGA. Est autem dimidium (416) quoque parallelepipedi FRQHLVEA; ergo parallepipedum FPKHLOGA aequatur alteri FRQHLVEA. Q. E. D.

COROLLARIUM.

418. Si parallelogrammum AGOL sumatur pro basi parallelepipedi FPKHLOGA, alterum vero parallelogrammum AEVL priori (203) aequale, sumatur pro basi alterius parallelepipedi FRQHLVEA; haec parallepipeda aequales bases habebunt, eruntque aeque (403) alta, cum sint inter plana parallela FPQH, AGVL. Ergo etiam aequalia (417) erunt parallelepipeda aeque alta, quorum bases sunt parallelogramma aequalia inter parallelas lineas constituta.

PROPOSITIO XVII.

TAB. VII. FIG. 24.

419. *Soliditas cujusvis parallelepipedi recti RG habentis rectangulam basim AROE, aequatur facto ex basi eadem in altitudinem RL ducta.*

Latera RA, RO, & altitudo RL in partes quotcumque, veluti in pedes, divisa concipiantur. Horum pedum tres sunto ex. gr. in RL, duo in RO, & quatuor in RA, ut inde basis AROE constet pedibus quadratis bis quatuor, nempe octo. Deinde eadem basis AROE ferri intelligatur versus LSG ea lege, ut sibi ipsi semper maneat parallela. Sane dum absolverit pedem unum EF, liquet singulos ejus pedes quadratos unum pedem cubicum descripsisse, basim vero ipsam octo. Rursus ubi absolverit secundum pedem FH, singuli pedes quadrati basis produxerunt denuo pedem cubicum unum, basis vero octo. Demum quando basis pervenerit in LSG,

hoc

hoc est, ubi totum parallelepipedum descripserit, manifestum est, ipsam pedes cubicos ter octo, seu viginti quatuor produxisse. Igitur pedes cubici parallelepipedo recto RG contenti, viginti quatuor erunt, quot nempe emergunt, si numerus pedum quadratorum baseos AROE per numerum pedum altitudinis RL multiplicetur. Quare (366) soliditas parallelepipedi recti RG aequatur facto ex basi eadem in altitudinem ducta. Q. E. D.

SCHOLION.

420. Eadem demonstratio habet locum etiam dum rectae RA, RO, RL incommensurabiles supponuntur, dummodo numerus partium aequalium, in quas illae divisae sunt, augeatur, & magnitudo minuatur in infinitum, ut ea quae supersunt, & contemnuntur, indefinite parva evadant.

COROLLARIUM I.

421. Quia cubus SO est parallepipedum, cujus altitudo AS (363) adaequat latus AE basis quadratae AROE; hujus quoque soliditas erit aequalis facto ex quadrato AROE in altitudinem AS, sive in latus AE. Igitur posita AE 3 pedum, 9 pedum quadratorum erit quadratum AROE, & cubus SO 27 pedes cubicos continebit. TAB. VI. FIG. 25.

COROLLARIUM II.

422. Liquet ex dictis dimensio muri, cujus ubique eadem est crassities. Ille siquidem habendus est veluti parallelepipedum rectum, cujus longitudo, latitudo, atque profunditas sit prorsus eadem, quae in muro.

COROLLARIUM III.

423. Hinc soliditas corporis utcumque irregula- TAB. IX. FIG. 9.

la-

laris sequenti methodo innotescet. Immerge corpus parallelepipedo IA recto, & cavo, atque ipsi affusa aqua, probe observa altitudinem LE aquae, cui totum corpus immersum est. Deinde extracto corpore, nota denuo altitudinem aquae LG. Demum ex LE subtrahe LG rectam, ut superstes sit GE: dico, soliditatem corporis quod aquae immersum erat, esse aequalem facto ex area rectanguli FCG ducta in rectam GE. Nam hujusmodi corpus aequatur parallelepipedo recto DFCGE habenti pro basi aream rectanguli FCG, & pro altitudine rectam GE: sed soliditas hujus parallelepipedi aequatur facto ex ejus basi FCG in altitudinem GE (419) ducta; ergo etiam soliditas corporis dati eidem facto aequalis erit.

PROPOSITIO XVIII.

TAB. VII. FIG. 26. 424. *Soliditas parallelepipedi recti SO habentis parallelogrammam basim AROE, aequatur facto ex eadem basi in altitudinem AS ducta.*

Ex A, & E demissis (112) ad RO perpendicularibus AF, EV, intelligatur super rectangulam basim AFVE constitui parallelepipedum rectum, & aeque altum, quod recto SO erit (417) aequale. Atqui soliditas illius parallelepipedi aequatur (419) facto ex rectangula basi AFVE in altitudinem AS; ergo & soliditas parallelepipedi SO erit aequalis facto ex eadem basi AFVE in altitudinem AS. Sed basis AFVE (203) aequatur basi AROE; ergo etiam soliditas parallelepipedi SO erit aequalis facto ex basi AROE in altitudinem AS. Q. E. D.

PROPOSITIO XIX.

TAB. VII. FIG. 27. 425. *Soliditas parallelepipedi obliqui CE aequatur facto ex basi GHEF in altitudinem RV ducta.*

Su-

Supra basim GHEF constitui intelligatur parallelepipedum rectum, & aeque altum, quod erit (417) obliquo CE aequale. Sed recti illius soliditas (419, 424) aequatur facto ex basi GHEF in altitudinem RV; ergo & soliditas obliqui CE eidem facto aequalis erit Q. E. D.

PROPOSITIO XX.

426. *Soliditas cujusvis prismatis triangularis CARFEG aequatur facto ex basi GFE in altitudinem RV ducta.* TAB. VII. FIG. 27.

Completo parallelogrammo GHEF, supra illud erigi concipiatur parallelepipedum aeque altum CE. Prisma CARFEG dimidium est (416) parallelepipedi CE: sed hujus soliditas aequatur (419.424.425) facto ex basi GHEF in altitudinem RV; ergo & soliditas prismatis aequabitur facto ex dimidia basi GHEF in altitudinem RV. Atqui triangulum CFE, quod basis est prismatis, dimidium est parallelogrammi GHEF; ergo soliditas prismatis CARFEG aequabitur facto ex basi GFE in altitudinem RV. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

427. Hinc soliditas cujusvis prismatis polygoni AH aequatur facto ex ejus basi in altitudinem ducta. Nam hoc prisma polygonum in triangularia aeque alta resolvi potest, quorum bases sunt triangula SVO, OVH, HVG. Cum ergo horum prismatum soliditates adaequent facta ex singulis basibus in communem altitudinem (426) ductis, evidens est, soliditatem illorum summae, seu prismatis polygoni AH esse aequalem facto ex basi polygona SVGHO in altitudinem ducta. TAB. VII. FIG. 28.

Co-

COROLLARIUM II.

428. Si basis SVGHO fuerit polygonum regulare circulo circumscriptum, cujus laterum numerus sit infinitus; utique in hoc casu polygonum (212) pro circulo, & prisma polygonum pro cylindro poterit usurpari. Ergo & soliditas cylindri erit aequalis facto ex basi in altitudinem ducta.

COROLLARIUM III.

429. Cum soliditas prismatis cujusvis habeatur ex basis area in altitudinem (427) ducta; liquet, quaecumque prismata fore aequalia, si fuerint aeque alta, & aequales bases habuerint.

PROPOSITIO XXI.

TAB. VIII. FIG. 1. 2. 430. P*Arallelepipeda, prismata, & cylindri sunt in ratione composita basium, & altitudinum;*

Sunto duo parallelepipeda AF, EV, quorum bases L, S, altitudines vero AH, EG. Ratio composita basis L ad basim S, & altitudinis AH ad altitudinem EG est illa, quam habet factum (235) ex antecedentibus, nimirum ex basi L in altitudinem AH, ad factum ex consequentibus, nempe ex basi S in altitudinem EG. Sed parallelepipedi AF soliditas aequatur facto (419. 424. 425) ex basi L in altitudinem AH, & soliditas parallelepipedi EV aequatur facto ex basi S in altitudinem EG; ergo ratio composita basis L ad basim S, & altitudinis AH ad altitudinem EG eadem est ac ratio parallelepipedi AF ad parallelepipedum EV, ideoque haec solida inter se erunt in eadem composita ratione. Eadem demonstratio in cylindris, & prismatibus locum habet. Q. E. D.

Co-

COROLLARIUM. I.

431. Cum etiam cubi AF, EV sint parallelepipeda, illi quoque (430) erunt in ratione composita basium L, S, & altitudinum AH, EG. TAB. VIII. FIG. 3. 4.

COROLLARIUM II.

432. Et quia ratio basium L, S componitur (329) ex rationibus HR ad GP, & HO ad GI; consequens est, ut ratio cubi AF ad cubum EV composita (431) sit ex tribus aequalibus rationibus HR ad GP, HO ad GI, & AH ad EG, seu triplicata (237) sit rationis lateris HO ad latus GI.

COROLLARIUM III.

433. Ratio itaque triplicata duarum rectarum quarumlibet HO, GI eadem est, (432) ac ratio cuborum AF, EV super illas rectas, veluti super latera descriptorum.

PROPOSITIO XXII.

434. *Cubus AF est ad cubum EV in ratione composita quadrati lateris HO ad quadratum lateris GI, & ejusdem lateris HO ad latus GI.* TAB. VIII. FIG. 3. 4.

Cubus AF est ad cubum EV in ratione (431) composita basis L ad basim S, & altitudinis AH ad altitudinem EG. Sed basis L est ad basim S, ut quadratum lateris HO ad quadratum lateris GI, & altitudo AH est ad altitudinem EG, ut latus HO ad latus GI; ergo etiam cubus AF erit ad cubum EV in ratione composita quadrati lateris HO ad quadratum lateris GI, & ejusdem lateris HO ad latus GI. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIII.

TAB. VIII. FIG. 5.

435. *Si quatuor rectae A, E, C, F fuerint proportionales; illarum quoque cubi proportionales mutuò erunt.*

Quia A est ad E, ut (*ex hyp*) C ad F, ratio A ad E eadem erit cum ratione C ad F, & ratio quadrati A ad quadratum E eadem erit cum ratione (339) quadrati C ad quadratum F. Igitur ratio composita quadrati A ad quadratum E, & rectae A ad E, eadem erit cum ratione composita quadrati C ad quadratum F, & rectae C ad F. Sed cubus A est ad cubum E in ratione composita (434) quadrati A ad quadratum E, & rectae A ad E, & cubus C est ad cubum F in ratione composita (434) quadrati C ad quadratum F, & rectae C ad F; ergo etiam cubus A erit ad cubum E, ut cubus C ad cubum F. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

436. *Proportionem parallelepipedorum, cylindrorum ac prismatum rectis lineis exhibere.*

TAB. VIII. FIG. 1. 2.

Sunto duo parallelepipeda AF, EV, in quibus basis L sit (333) ad basim S, ut recta CO ad Z, & altitudo AH ad altitudinem EG, ut recta Z ad M: dico, solidum AF esse ad aliud EV, ut recta CO ad M. Nam solidum AF est ad solidum EV in ratione (430) composita basis L ad basim S, & altitudinis AH ad altitudinem EG. Sed ratio basis L ad basim S eadem est ac (*ex constr*) ratio CO ad Z, & ratio altitudinis AH ad altitudinem EG eadem est ac (*ex constr*) ratio Z ad M; ergo etiam solidum

AF

AF erit ad solidum EV in ratione composita rectae CO ad Z, & ejusdem Z ad M, hoc est (332) ut recta CO ad M. Idem de cylindris, & prismatibus est dicendum. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

437. Hinc aeque alta parallelepipeda AF, EV rationem basium habent. Nam cum (*ex constr*) AH sit ad EG, ut Z ad M, sintque (*ex hyp*) aequales AH, EG; utique etiam rectae Z, M aequari mutuò debent, atque adeo CO erit ad Z, ut (224) eadem CO ad M. Sed solidum AF est ad aliud EV, ut (436) recta CO ad M; ergo etiam solidum AF erit ad aliud EV, ut recta CO ad Z, sive (*ex constr*) ut basis L ad basim S. Eadem demonstratio prismatibus quoque convenit, ac cylindris. TAB. VIII. FIG. 6. 7

COROLLARIUM II.

438. Si parallelepipedum SO, & prisma triangulare CRAEFG aequales habeant altitudines SA, RV; erunt ipsa inter se, ut bases AROE, GFE. Nam completo parallelogrammo GHEF, superque illud erecto parallelepipedo CE eiusdem cum prismate altitudinis, utique (437) parallelepipedum SO ad CE erit, ut basis AROE ad basin GHEF. Sed (416) parallelepipedum CE est ad prisma CRAEFG, ut 2 ad 1, sive (176) ut illius basis GHEF ad hujus basin GFE; ergo ex aequo, parallelepipedum SO erit ad aeque altum prisma CRAEFG, ut basis AROE ad basim GFE. TAB. VII. FIG. 26. 27.

COROLLARIUM III.

439. Hinc si areae parallelogrammi AROE, & trianguli GFE multiplicentur per rectas aequales SA,

 RV,

RV, quae perpendiculares sint ad areas illas; facta erunt, ut ipsae areae multiplicatae. Sunt siquidem haec facta, ut solida SO, CRAEFG aeque alta, quae (438) sunt ut bases, sive areae AROE, GFE.

PROPOSITIO XXV.

440. *AEqualia parallelepipeda, prismata, & cylindri reciprocant bases, & altitudines. Et si reciprocant bases, & altitudines, sunt aequalia.*

TAB. VIII. FIG. 8. 9. I. Sunto parallelepipeda AF, EV quorum bases L, S sint, ut rectae CO, Z, & altitudines AH, EG, ut rectae Z, M; eritque solidum AF ad aliud EV, ut (436) recta CO ad M. Sed solidum AF alteri (*ex hyp*) EV est aequale; ergo & CO aequabitur ipsi M. Igitur (223) CO erit ad Z, ut M ad Z: sed CO est ad Z (*ex constr*), ut basis L ad basim S, & M est ad Z (*ex constr*), ut altitudo EG ad altitudinem AH; ergo etiam basis L erit ad basim S, ut altitudo EG ad altitudinem AH.

II. Basis L est (*ex hyp*) ad basim S, ut altitudo EG ad altitudinem AH: sed basis L est (*ex constr*) ad basim S, ut recta CO ad Z, & (*ex constr*) altitudo EG ad altitudinem AH, ut M ad Z; ergo etiam CO erit ad Z, ut M ad eandem Z, ac proinde CO aequabitur (225) ipsi M. Sed solidum AF est (436) ad EV, ut recta CO ad M; ergo etiam solidum AF solido EV erit aequale. Eadem demonstratio in cylindris, ac prismatibus locum habet. Q. E. D.

CA-

CAPVT IV.

De Pyramidum, Conorumque symptomatis, atque soliditatibus.

PROPOSITIO XXVI.

441. *Qvaevis sectio triangularis pyramidis facta plano ad basim parallelo, est figura similis ejus basi.*

Pyramis AGCF secetur plano SOE ad basim GAC parallelo: dico, sectionem SOE esse similem ejus basi. Nam cum planum GFC secet parallela plana SOE, GAC, efficiet (390) sectiones SE, GC parallelas. Eandem ob causam rectae OS, OE parallelae erunt rectis AG, AC, ideoque singuli anguli E, O, S trianguli SOE aequantur (413) singulis C, A, G trianguli GAC. Igitur triangularis sectio SOE similis (274) erit basi GAC. Q. E. D. TAB. VIII. FIG. 10.

COROLLARIUM.

442. Hinc sectio SOE erit ad basim GAC, ut quadratum FE ad quadratum FC. Nam quia in triangulo GFC est SE parallela ad ejus latus GC, erit (267) GC ad SE, ut FC ad FE, & quadratum GC erit (339) ad quadratum SE, ut quadratum FC ad quadratum FE. Sed triangulum GAC est (336) ad sibi simile SOE, ut quadratum GC ad quadratum SE; ergo & triangulum GAC erit ad aliud SOE, ut quadratum FC ad quadratum FE, & invertendo, triangulum SOE erit ad triangulum GAC, ut quadratum FE ad quadratum FC.

PROPOSITIO XXVII.

TAB. VIII. FIG. 10. 11. 443. *Si latera FC, LQ triangularium pyramidum AGCF, IVQL sic dividantur in E, & Z, ut FE sit ad FC in ratione LZ ad LQ, indeque per E, & Z secentur pyramides duobus planis SOE, XRZ parallelis ad earum bases; erunt hae sectiones iisdem basibus proportionales.*

Quia (*ex hyp*) est FE ad FC, ut LZ ad LQ, etiam quadratum FE erit (339) ad quadratum FC, ut quadratum LZ ad quadratum LQ. Sed sectio SOE est (442) ad basim GAC, ut quadratum FE ad quadratum FC, & sectio XRZ est ad basim VIQ, ut quadratum LZ ad quadratum LQ; ergo sectio SOE erit ad basim GAC, ut sectio XRZ ad basim VIQ, & permutando, sectio SOE erit ad sectionem XRZ, ut basis GAC ad basim VIQ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVIII.

TAB. VIII. FIG. 12. 444. *Si pyramidi triangulari ZCAF sine fine prismata inscribantur; illorum summa proxime est pyramidi ipsi aequalis.*

Dividatur latus AF in quotcumque aequales partes AS, SG, GF, & per puncta S, G factis sectionibus SER, GLQ ad basim AZC parallelis, inscripta intelligantur pyramidi prismata triangularia VESA, KLGS, quibus deinde extra pyramidem productis, prodibunt pyramidi circumscripta prismata CISA, ROGS, QHFG. Excessus autem horum prismatum supra inscripta, sunt tria solida HG, OK, IV, quae simul sumpta aequantur prismati CISA. Nam prisma HG aequale (429) est LS, ac proinde

inde HG cum OK aequatur ROGS, hoc est (429) VESA; quare tria solida HG, OK, IV aequantur prismati CISA. Jam vero si latus AF in plures sine fine partes aequales dividi concipiatur, ita ut in infinitum prismatum numerus augeatur, tunc recta AS evadet qualibet data minor; unde etiam prisma CISA fiet (426) quolibet dato minus. Igitur prismatum circumscriptorum (multoque magis pyramidis ZCAF, quae pars est prismatum sibi circumscriptorum) excessus supra inscripta prismata, evadet quolibet dato minor, ideoque pro nihilo reputandus. Summa ergo prismatum sine fine pyramidi inscriptorum, proxime erit pyramidi ipsi aequalis. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

445. *Pyramides triangulares aeque altae QRAC, SFEZ sunt inter se, ut bases QRA, SFE.* TAB. VIII. FIG. 13. 14.

Pyramidum altitudines aequales referant latera CA, ZE, quibus in quot placuerit aequales partes, & aeque multas divisis, factisque per divisionum puncta sectionibus ad basim parallelis, intelligantur utrique pyramidi inscripta prismata aeque multa, & aeque alta. Quia latera CA, ZE sic sunt divisa in V, & H, ut (*ex constr*) CV sit ad CA in ratione ZH ad ZE, sectiones LOV, IKH erunt (443) ut bases QRA, SFE. Sed (437) prismata aeque alta LOVA, IKHE sunt, ut sectiones LOV, IKH; ergo erunt quoque ut bases QRA, SFE. Eodem modo etiam constabit, prisma GPNV esse ad aliud CDTH, ut basis QRA ad basim SFE; ergo (226) prisma LOVA erit ad prisma IKHE, ut prisma GPNV ad prisma CDTH, & sic porro in infinitum, si pyramidibus sine fine prismata sint inscripta. Ergo (259) & summa

ma omnium prismatum inscriptorum pyramidi QRAC erit ad summam omnium inscriptorum pyramidi SFEZ, ut prisma unum LOVA ad alterum IKHE, sive ut basis QRA ad basim SFE. Sed summae prismatum inscriptorum aequantur proxime (444) pyramidibus; ergo etiam pyramis QRAC erit ad aliam SFEZ, ut basis QRA ad basim SFE.

PROPOSITIO XXX.

TAB. VIII. FIG. 15. 16. 446. *Pyramis quadrilatera HGRSK est ad aeque altam triangularem ECFA, ut basis HGRS ad basim ECF.*

Basis HGRS resolvatur in triangula L, V; pyramis autem tota HGRSK in triangulares HSRK, HGRK. Pyramis HSRK est (445) ad aeque altam HGRK, ut basis L ad basim V; igitur componendo, summa pyramidum HSRK, HGRK, seu tota pyramis HGRSK erit ad pyramidem HGRK, ut summa basium L, V, seu tota basis HGRS ad basim V. Sed (445) eadem pyramis HGRK est ad aliam aeque altam ECFA, ut basis V ad basim ECF; ergo ex aequo, pyramis HGRSK erit ad pyramidem ECFA, ut basis HGRS ad basim ECF. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

447. Hinc etiam pyramides quadrilaterae aeque
TAB. altae HGRSK, QZLOI sunt, ut bases HGRS, QZLO.
VIII. Nam pyramis HGRSK est (446) ad aeque altam tri-
FIG. 15. angularem pyramidem ECFA, ut basis HGRS ad ba-
16. 17. sim ECF. Similiter pyramis eadem ECFA est (446) ad aeque altam QZLOI, ut basis ECF ad basim QZLO; ergo ex aequo, pyramis HGRSK erit ad aliam QZLOI, ut basis HGRS ad basim QZLO.

Co-

COROLLARIUM II.

448. Cum pyramides quadrilaterae aeque altae ſint ut baſes; inde fit, ut etiam invicem ſint aequales, ſi aequales quoque baſes habuerint.

PROPOSITIO XXXI.

449. *Si ad centrum I cubi GL fiat quadrata pyramis QZLOI; haec erit ſexta pars cubi.* TAB. VIII. FIG. 17.

Si ex eodem centro I ad ſingulos cubi angulos ductae lineae conciperentur, cubus in ſex pyramides quadrilateras aeque altas, & aequalium baſium, atque adeo (448) aequales divideretur; illarum quippe altitudines forent diſtantiae (367) aequales centri I a ſex quadratis ambientibus cubum, baſes vero eſſent aequalia quadrata eadem. Ergo illarum quaelibet, veluti QZLOI, erit ſexta pars cubi. Q. E. D.

COROLLARIUM.

450. Cum ſoliditas cubi GL ſit (421) aequalis facto ex baſi QZLO in altitudinem GQ, vel HP; liquet, ſoliditatem pyramidis QZLOI, quae eſt (449) ſexta pars cubi, eſſe aequalem facto ex baſi QZLO in ſextam partem rectae HP, ſive in tertiam partem altitudinis ſuae IP.

PROPOSITIO XXXII.

451. *Soliditas cujuſvis triangularis pyramidis ABCD aequatur facto ex ejus baſi ABC in tertiam partem altitudinis ſuae DE.* TAB. VIII. FIG. 18. 17.

Fiat cubus GL, cujus latus GQ, vel HP duplum ſit altitudinis DE triangularis pyramidis ABCD.

Dein ex centro I ductis ad singulos basis angulos rectis IQ, IZ, IL, IO, fiat quadrata pyramis QZLOI. Quoniam singulae IP, DE dimidiae sunt GQ, vel HP, aequales pariter esse debent, ideoque aeque altae erunt pyramides QZLOI, ABCD. Igitur pyramis quadrilatera QZLOI erit (446) ad triangularem ABCD, ut basis QZLO ad basim ABC, sive (439) ut factum ex basi QZLO in tertiam partem rectae IP ad factum ex basi ABC in tertiam partem ejusdem IP, vel DE. Sed soliditas pyramidis QZLOI aequatur (450) facto ex basi QZOL in tertiam partem rectae IP; ergo (255) soliditas quoque alterius ABCD aequabitur facto ex basi ABC in tertiam partem rectae DE.

COROLLARIUM I.

TAB. VIII. FIG. 19. 452. Hinc soliditas polygonae pyramidis SVORLG est aequalis facto ex basi in altitudinis tertiam partem. Diviso enim in triangula polygono SVORL, pyramis polygona in triangulares pyramides dividetur. Sed singularum harum pyramidum soliditates adaequant (451) facta ex singulis basibus in communis altitudinis tertiam partem; ergo & soliditas illarum summae, seu polygonae pyramidis SVORLG aequabitur facto ex basi SVORL in altitudinis tertiam partem.

COROLLARIUM II.

·. Quia (427) cujusvis prismatis AR soliditas facto ex basi SVORL in altitudinem ducta, is autem SVORLG ejusdem basis, & aeque soliditas aequatur (452) facto ex eadem basi ORL in ejusdem altitudinis tertiam partem; liquet, pyramidem SVORLG esse tertiam partem prismatis AR ejusdem basis, & aeque alti.

Co-

COROLLARIUM III.

454. Si basis SVORL sit polygonum regulare circulo circumscriptum, cujus laterum numerus augeatur in infinitum, & magnitudo minuatur in infinitum; utique (212) polygonum pro circulo, prisma pro cylindro, & pyramis pro cono poterit usurpari. Ergo (453) etiam conus tertia pars erit cylindri ejusdem basis, & aeque alti.

COROLLARIUM IV.

455. Cum cylindri soliditas (428) sit aequalis facto ex basi in altitudinem ducta; liquet, (454) soliditatem coni ejusdem basis, & aeque alti aequalem esse facto ex basi in altitudinis tertiam partem.

COROLLARIUM V.

456. Quia pyramis tertia pars (453) est prismatis ejusdem basis, & aeque alti, sicuti etiam conus tertia pars (454) cylindri; patet, duas pyramides, & duos conos inter se esse, ut correspondentia prismata, & cylindri.

COROLLARIUM. VI.

457. Igitur quemadmodum (430) prismata, & cylindri, ita pyramides, & coni erunt in ratione composita basium, & altitudinum.

COROLLARIUM VII.

458. Similiter cum aequalia prismata, & cylindri reciprocent (440) bases, & altitudines, & vicissim; id conis (456), & pyramidibus competere etiam debet.

Co-

COROLLARIUM VIII.

459. Demum cum in ratione basium sint aeque alta (437) prismata, & cylindri; in eadem quoque ratione erunt duae pyramides, & duo coni eandem altitudinem habentes.

CAPUT V.

De solidorum similium mutua proportione.

PROPOSITIO XXXIII.

460. *Similia parallelepipeda, prismata, & pyramides sunt inter se, ut cubi laterum homologorum.*

TAB. VIII. FIG. 3.4. I. Sunto parallelepipeda recta AF, EV mutuò similia: dico, haec inter se esse, ut cubus lateris HO ad cubum lateris GI. Solidum quippe AF est ad EV in ratione (430) composita basis L ad basim S, & altitudinis AH ad altitudinem EG. Sed (378) propter bases similes L, & S, ratio basis L ad basim S eadem est cum ratione (337) quadrati HO ad quadratum GI, atque ob similia (*ex hyp*) plana AO, EI, ratio altitudinis AH ad altitudinem EG eadem est cum ratione lateris HO ad latus GI. Ergo etiam solidum AF erit ad aliud EV in ratione composita quadrati HO ad quadratum GI, & lateris HO ad latus GI, sive (434) ut cubus lateris HO ad cubum lateris GI.

TAB. VIII. FIG. 1.2. II. Sunto parallelepipeda obliqua AF, EV, quorum altitudines referant rectae AH, EG. Quia haec solida (*ex hyp*) sunt similia, plana AR, RO, OA similia (378) erunt planis EP, PI, IE, ideoque tres pla-

plani anguli ACR, RCO, OCA aequantur tribus EQP, PQI, IQE. Ergo anguli solidi C, & Q sunt (370) aequales; ideoque si intra invicem positi concipiantur, mutuò (371) congruent, coincidentque proinde latera AC, EQ, quae idcirco ad bases L, S erunt aequaliter inclinata. Itaque junctis CH, QG, angulus ACH aequabitur (349) EQG: sed recti, seu aequales sunt quoque anguli H, G; igitur similia erunt (275) triangula AHC, EGQ, & ratio AH ad EG eadem erit cum ratione AC ad EQ, seu cum ratione (238) CO ad QI, ob similia (*ex hyp*) plana AO, EI. Sed etiam ratio basis L ad sibi similem basim S eadem est cum ratione (337) quadrati CO ad quadratum QI; ergo ratio composita basis L ad basim S, & altitudinis AH ad altitudinem EG, seu ratio (430) solidi AF ad solidum EV, eadem erit cum ratione composita quadrati CO ad quadratum QI, & lateris CO ad latus QI, seu eadem erit cum ratione (434) cubi lateris CO ad cubum lateris QI. Ergo solidum AF erit ad aliud EV, ut cubus lateris CO ad cubum lateris QI. Eadem demonstratio in prismatibus quoque, & pyramidibus habet locum Q. E. D.

COROLLARIUM.

461. Igitur similia parallelepipeda, prismata, & pyramides sunt in ratione (433) triplicata laterum homologorum.

PROPOSITIO XXXIV.

462. *Cylindri similes sunt inter se, ut cubi diametrorum suarum basium.*

TAB. VIII. FIG. 20. 21.

I. Sunto cylindri recti VS, GI, quorum altitudines referant axes AC, EK. Cum similes sint cylin-

lindri, ratio altitudinis AC ad altitudinem EK eadem (377) erit cum ratione diametrorum FS, QI, & ratio basis FLS ad basim QPI eadem (335) est cum ratione quadrati FS ad quadratum QI. Igitur ratio composita basis FLS ad basim QPI, & altitudinis AC ad altitudinem EK, seu (430) ratio cylindri VS ad cylindrum GI, eadem erit cum ratione composita quadrati FS ad quadratum QI, & lateris FS ad latus QI, seu eadem (434) erit cum ratione cubi diametri FS ad cubum diametri QI. Itaque cylindrus VS erit ad alium GI, ut cubus diametri FS ad cubum diametri QI.

TAB. VIII. FIG. 22. 23. II. Si vero cylindri similes VS, GI sint obliqui, & illorum altitudines referant rectae AH, EO; utique axes AC, EK erunt ad bases aequaliter (377) inclinati, ideoque junctis CH, KO, angulus ACH (349) aequabitur EKO. Recti autem sunt, seu aequales anguli H, O; ergo similia (275) sunt triangula ACH, EKO, & ratio altitudinis AH ad altitudinem EO eadem erit cum ratione AC ad EK, vel (377) FS ad QI. Sed ratio basis FLS ad basim QPI eadem (345) est cum ratione quadrati FS ad quadratum QI; ergo ratio composita basis FLS ad basim QPI, & altitudinis AH ad altitudinem EO, seu (430) ratio cylindri VS ad cylindrum GI eadem erit cum ratione composita quadrati FS ad quadratum QI, & lateris FS ad latus QI, seu eadem (434) erit cum ratione cubi FS ad cubum QI. Igitur cylindrus VS est ad cylindrum GI, ut cubus diametri FS ad cubum diametri QI. Q. E D.

COROLLARIUM I.

TAB. VIII. Fig. 20. 21. 22. 23. 463. Quoniam coni FAS, QEI cylindris similibus inscripti, sunt eorum (454) tertiae partes & similes (377) inter se; liquet, etiam conum FAS esse ad sibi similem QEI, ut cubus diametri FS ad cubum diametri QI.

Co-

COROLLARIUM II.

464. Igitur cylindri, & coni similes inter se sunt in ratione (333) triplicata diametrorum suarum basium.

LEMMA.

465. *Si quadranti circuli NAG sine fine rectangula inscribantur; horum summa quadranti proxime erit aequalis.* TAB. VIII. FIG. 24.

Radio AN in quotvis aequales partes diviso, inscribantur quadranti rectangula MCDH, AMBR, quibus deinde extra quadrantem continuatis, prodibunt circumscripta rectangula CNED, MCVB, AMTG. Excessus autem horum rectangulorum supra inscripta, sunt rectangula CNED, HDVB, RBTG, quae simul sumpta aequantur circumscripto rectangulo AMTG. Nam rectangulum CNED aequatur (202) alteri MCDH, unde hinc inde addito rectangulo HDVB, duo simul rectangula CNED, HDVB aequabuntur rectangulo MCVB, vel (202) AMBR; & propterea tria rectangula CNED, HDVB, RBTG simul sumpta aequabuntur circumscripto rectangulo AMTG. Jam vero si radius AN in plures sine fine partes aequales dividatur, atque ita rectangulorum quadranti inscriptorum numerus augeatur in infinitum, tunc altitudo MA rectanguli AMTG fiet qualibet data minor, ideoque & rectangulum AMTG evadet (193) quolibet dato minus; ergo etiam excessus rectangulorum circumscriptorum (multoque magis quadrantis NAG) supra inscripta, fiet tandem quolibet dato minor, ideoque pro nihilo reputandus. Quare rectangulorum quadranti sine fine inscriptorum summa eidem quadranti proxime est aequalis.

Co-

COROLLARIUM.

466. Quia dum quadrans circuli NAG circa radium NA rotando, describit (375) hemisphaerium, rectangula illi inscripta, cylindros hemisphaerio inscriptos (374) generant; liquet, quod sicuti summa rectangulorum sine fine quadranti circuli inscriptorum, eidem quadranti proxime (465) est aequalis, ita summa cylindrorum sine fine hemisphaerio inscriptorum, hemisphaerio proxime aequari debet.

PROPOSITIO XXXV.

TAB. VIII. FIG. 25. 26. 467. *Si radiis AM, RV in quotvis aequales partes, & aeque multas divisis, quadrantibus AMN, RVY inscribi intelligantur rectangula aeque multa, quae circa immotos radios circumacta, inscribant utrique hemisphaerio cylindros aeque multos, sibi invicem insistentes; cylindrus genitus a rectangulo DCEF, erit ad alium genitum a rectangulo TSIZ, ut cubus diametri AQ ad cubum diametri RB.*

Quoniam rectae AC, RS aeque, seu eodem modo (*ex hyp*) continentur in radiis AM, RV, sive in diametris AQ, RB; utique QA ad AC erit, ut BR ad RS, & dividendo, QC erit ad CA, ut BS ad SR. Sed propter QC, CH, CA continue (282) proportionales, est (338) QC ad CA, ut quadratum CH ad quadratum CA, similiterque ob rectas BS, SL, SR continue (282) proportionales, est (338) BS ad SR, ut quadratum SL ad SR quadratum. Ergo cum QC sit ad CA, ut BS ad SR, etiam quadratum CH erit ad quadratum CA, ut SL quadratum ad quadratum SR, & (339) CH erit ad CA, ut SL ad SR, atque adeo permutando, CH ad SL erit, ut CA ad SR, sive (*ex hyp*) ut CD ad ST. Ergo

& HE

& HE dupla CH, erit ad LI duplam SL in eadem ratione CD ad ST. Itaque cylindri recti geniti ab inscriptis rectangulis DCEF, TSIZ erunt (377) similes inter se; habent enim axes CD, ST proportionales rectis HE, LI, quae sunt diametri suarum basium. Igitur (402) cylindrus genitus a rectangulo DCEF erit ad genitum a rectangulo TSIZ, ut cubus HE ad cubum LI. Verum cum sit HE ad LI, ut CD ad ST, sive ut AC ad RS, aut ut AQ ad RB; etiam cubus HE (435) erit ad cubum LI, ut cubus AQ ad cubum RB. Ergo cylindrus quoque genitus a rectangulo DCEF erit ad genitum a rectangulo TSIZ, ut cubus diametri AQ ad cubum diametri RB. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVI.

468. *Sphaerae PANQ, GRYB sunt inter se, ut cubi suarum diametrorum.* TAB. VIII. FIG. 25. 26.

Cylindrus genitus rotatione rectanguli DCEF, est (466) ad cylindrum genitum a rectangulo TSIZ, ut cubus AQ ad cubum RB. Similiter cylindrus genitus rotatione rectanguli W*Def* est (466) ad genitum a rectangulo XT*iz*, ut cubus AQ ad cubum RB. Ergo (226) cylindrus genitus rotatione rectanguli DCEF est ad alium genitum rotatione rectanguli TSIZ, ut cylindrus genitus a rectangulo WD*ef* ad alium genitum a rectangulo XT*iz*, & sic porro in infinitum, si sine fine cylindri hemisphaerio sint inscripti. Igitur (259) omnes simul cylindri inscripti hemisphaerio PAN erunt ad omnes simul inscriptos hemisphaerio alteri GRY, ut cylindrus genitus a rectangulo DCEF ad genitum a rectangulo TSIZ, sive (466) ut cubus AQ ad cubum RB. Sed omnes simul cylindri inscripti hemisphaeriis PAN, GRY, proxime hemisphae-

phaeriis ſunt (365) aequales; ergo etiam hemiſphaerium PAN erit ad aliud GRY, & propterea etiam ſphaera PANQ erit ad ſphaeram GRYB, ut cubus diametri AQ ad cubum diametri RB.

COROLLARIUM I.

469. Igitur ſphaerae ſunt quoque in ratione (433) triplicata ſuarum diametrorum.

FINIS.



ELEN.

ELENCHVS

Propositionum Euclidearum, quarum singulis assignantur correspondentes in hoc tractatu.



Libri I. Euclidis.

Prop.	resp. §.
1	86.
4	106
5	182
6	182
8	83
9	85
10	110
11	87
12	112
13	98
14	103
15	96
16	171
18	181
19	181
20	16
23	88
24	104
25	106
26	(174 (175
27	132
28	149
29	149
30	153
31	123
32	(170 (161
33	151
34	176
35	203
36	203
37	198
38	198
39	199
40	199
41	ex 204
43	178
46	191
47	311
48	325

Libri II. Euclidis.

Prop	ex §.
1	193
2	315
3	316
4	317
5	318
6	319
11	302
12	323
13	320

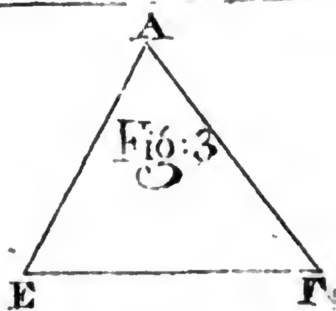
Libri III. Euclidis.

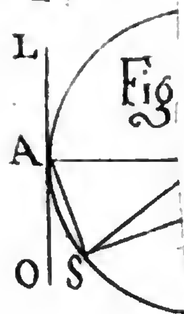
Prop	ex §.
1	157
3	(113 (190
4	115
5	33
6	resp §. 33
7	77
8	77
10	84
11	147
12	147
13	148
15	78
16	124
17	146
18	126
20	139
21	136
22	141
25	156
26	82
27	107
28	(ex 89 (ex 137
29	ex 89
30	(ex 114
31	144
32	140
35	280
36	296
37	301

Lib. IV. Euclidis

Prop.	resp. §.
1	16
5	160

			ERRATA	CORRIGE.
Pag. 10	*linea*	4	ſeu , ſeptem	ſex , ſeptem
Pag. 13	*Corol.*	4	TAB. I. FIG. I.	TAB.II.FIG. I.
Pag. 31	*linea*	32	xe C erigatur	ex C erigatur
Pag. 53	*linea*	10	177	181
Pag. 57	*linea*	6	quadratum CALH	quadratum CAIH
Pag. 63	*linea*	13	ttianguli AEC	trianguli AEC
Pag. 93	*linea*	29	quales AS, ER	aequales AS , ER
Pag. 95	*linea*	32	coaeſcant	coaleſcant.

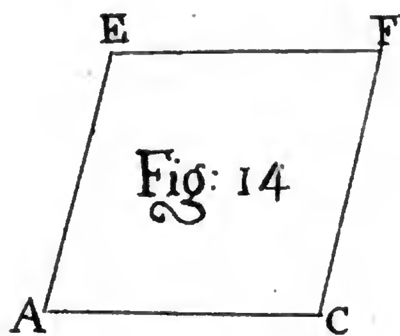


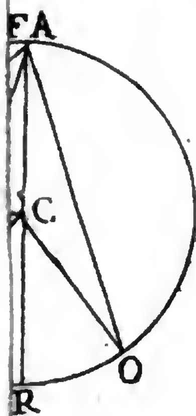


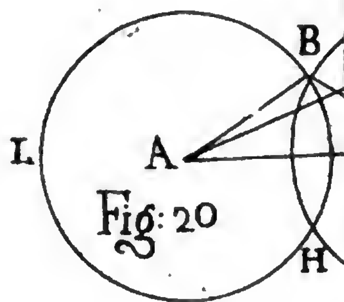
R

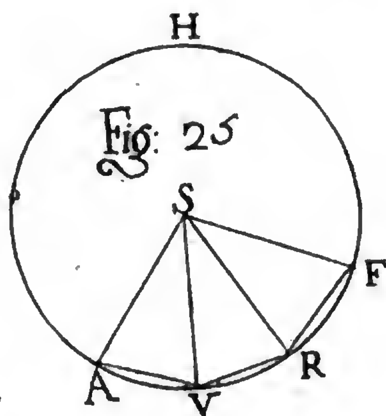
8

F









168

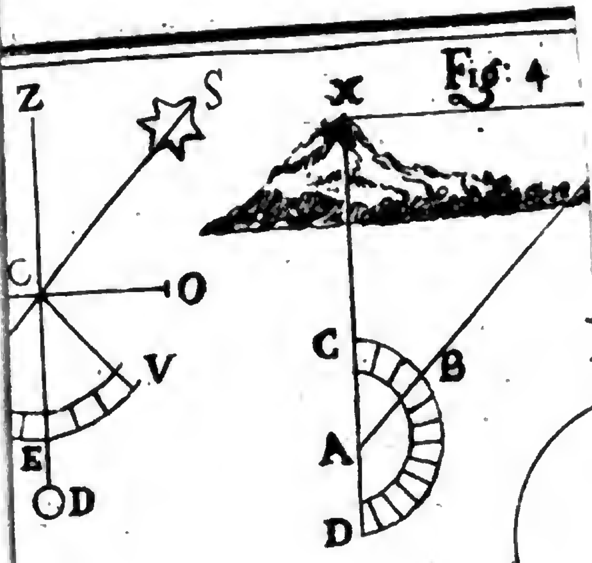


Fig: 4

5-8-22

A
I

H

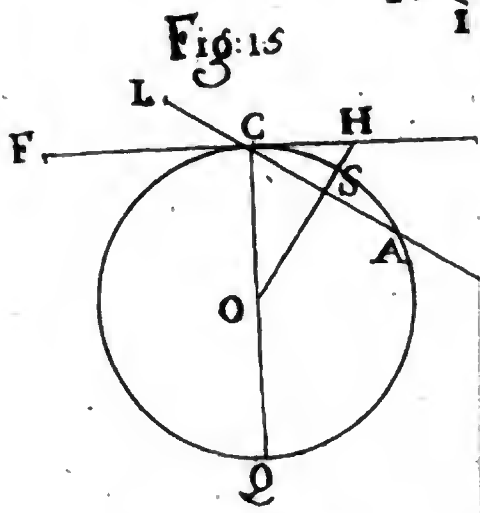


Fig: 15

R

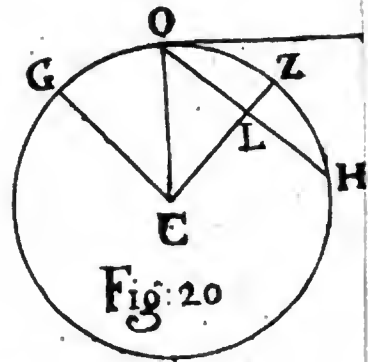


Fig: 20

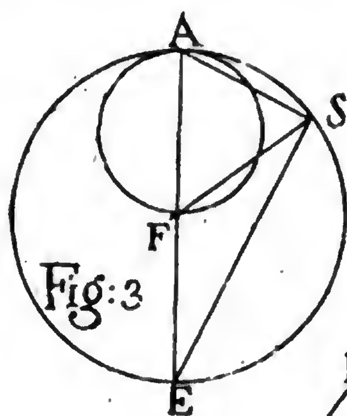
Q

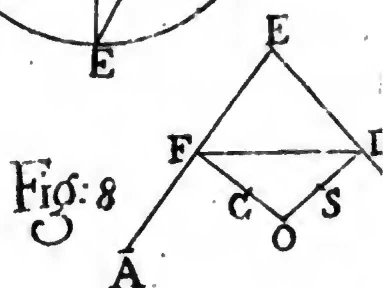
S

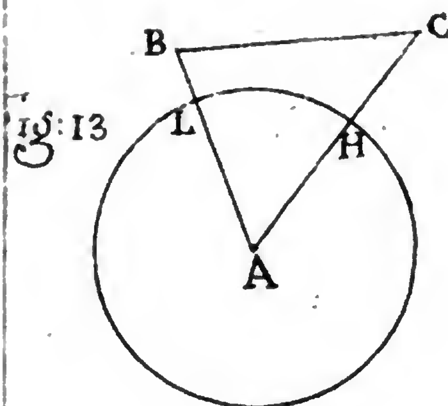


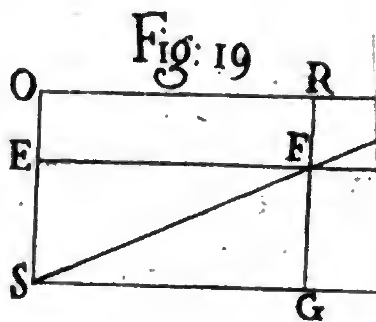
Fig: 25

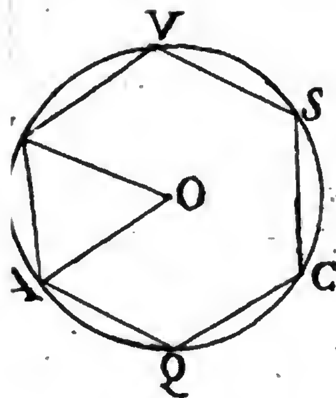


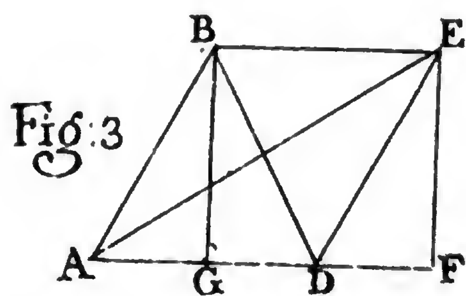

A
S
F
E
Fig: 3

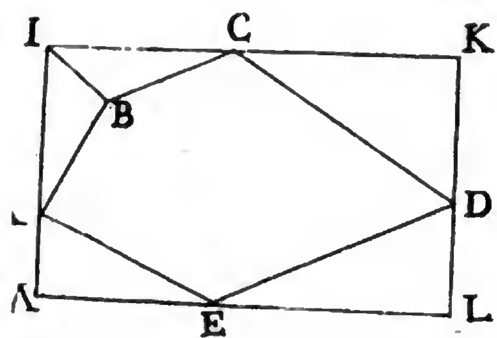

E
F
I
C
S
O
A
Fig: 8

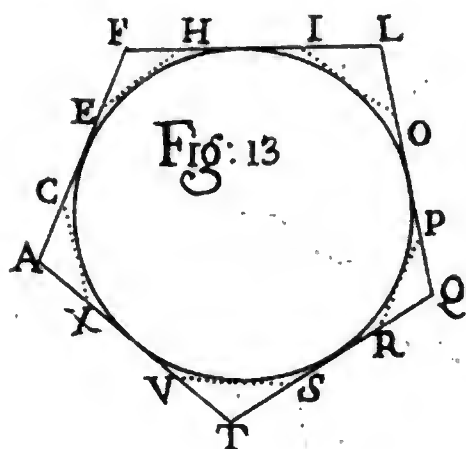

B
C
L
H
A
ig: 13

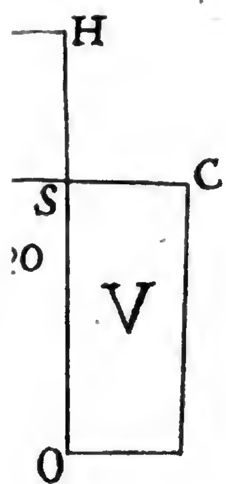

Fig: 19
O
R
E
F
S
G

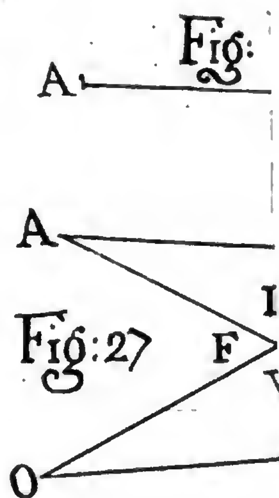

V
S
O
C
Q

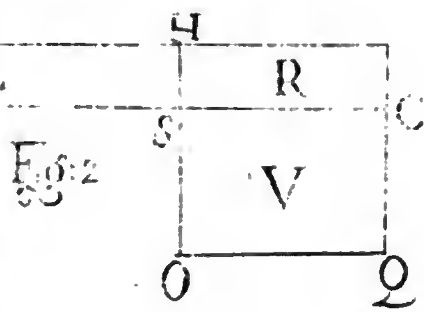

Fig:3
B
E
A
G
D
F

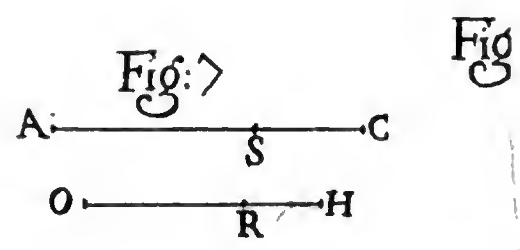

I
C
K
B
D
E
L

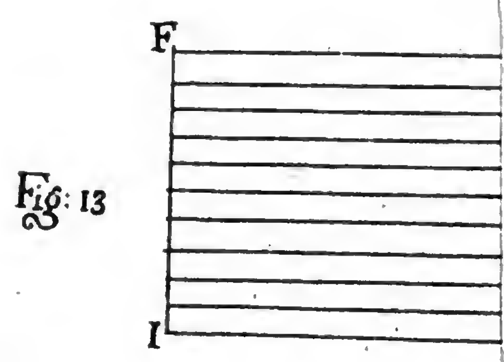

F
H
I
L
E
Fig:13
O
C
P
A
Q
X
R
V
S
T


H
C
S
V
O

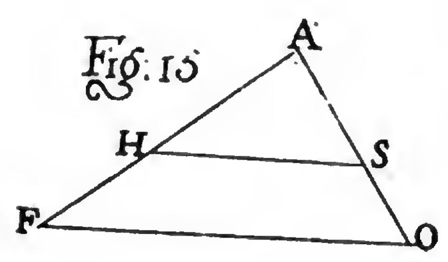

Fig:
A
A
I
Fig:27
F
O

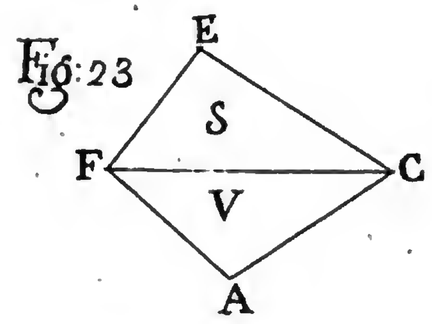

H
R
S
C
Fig:2
V
O
Q


Fig:7
A
S
C
O
R
H
Fig


F
Fig: 13
I


F


Fig:15
A
H
S
F
O


E
Fig:23
S
F
C
V
A

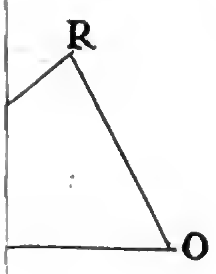
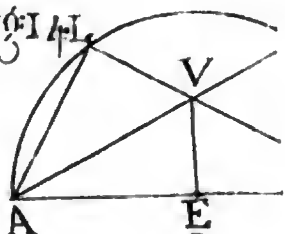
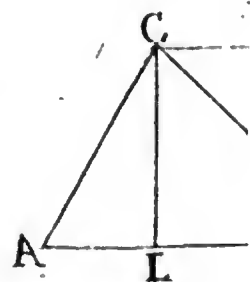
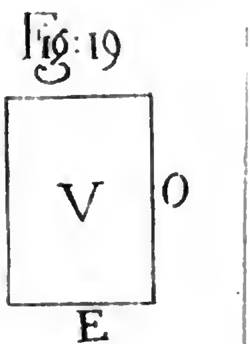
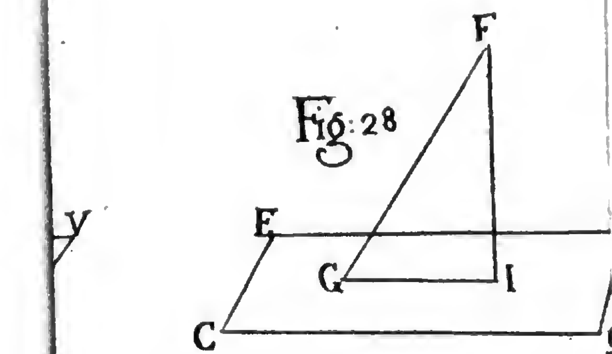

R
O

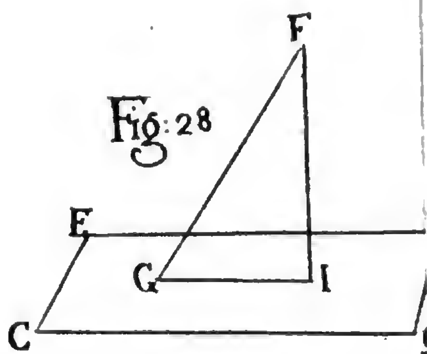
Fig: 4

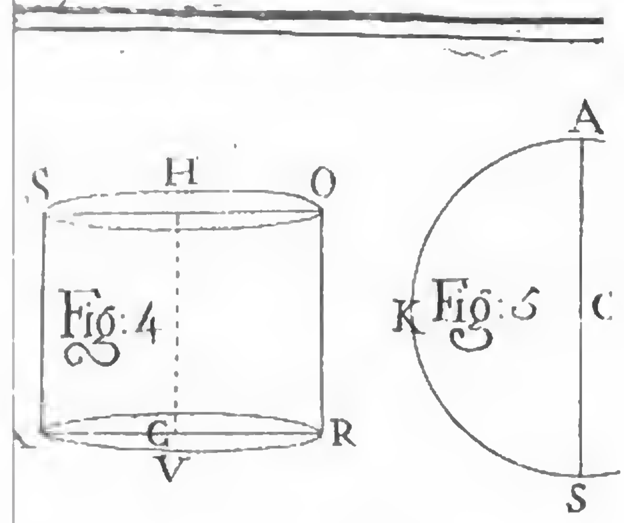


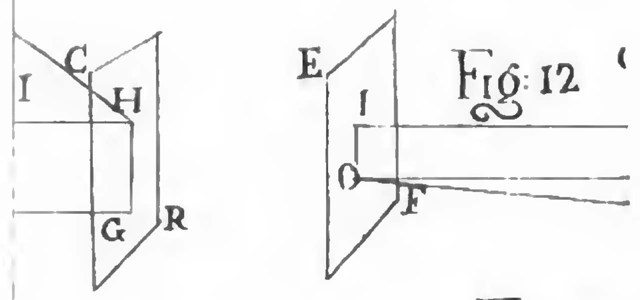


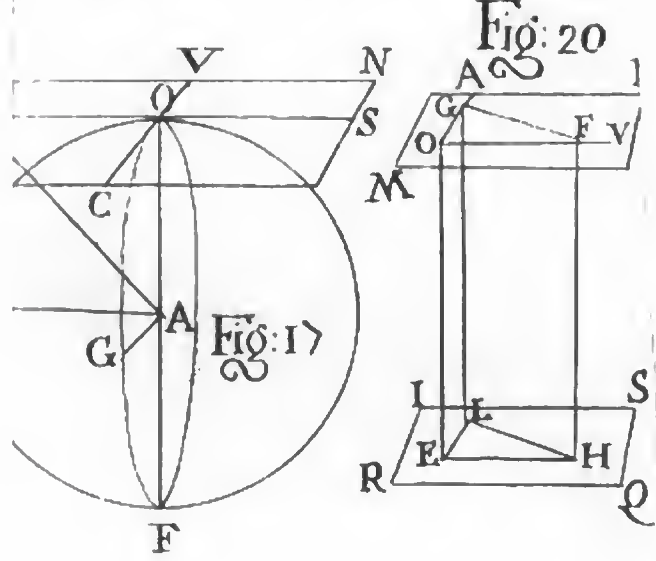


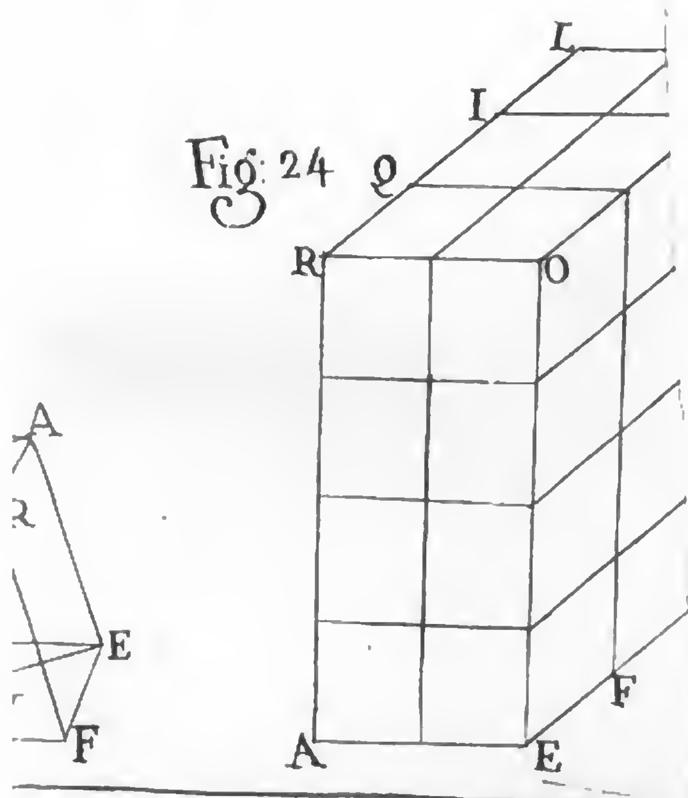


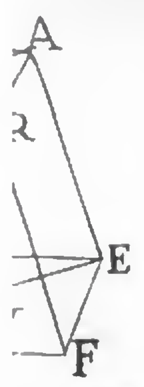



S
H
O
Fig: 4
G
R
V
A
K
Fig: 5
C
S

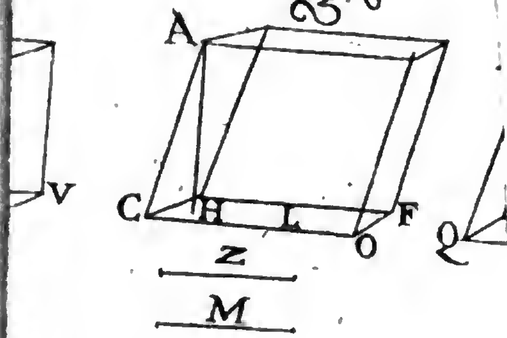

C
I
H
G
R
E
Fig: 12
I
O
F

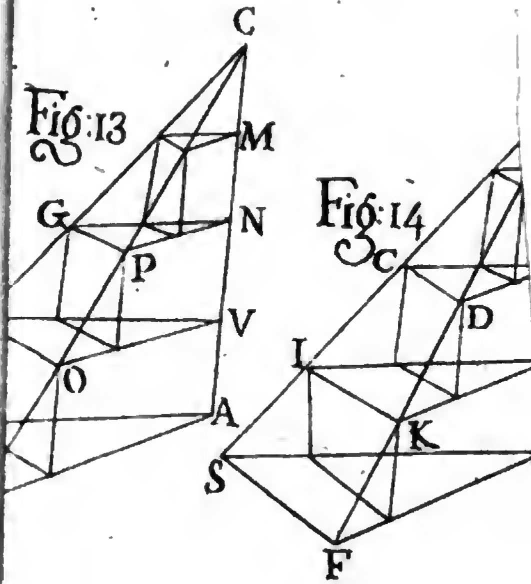

V
N
O
S
C
A
G
Fig: 17
F
Fig: 20
A
G
F
V
O
M
L
S
E
H
R
Q

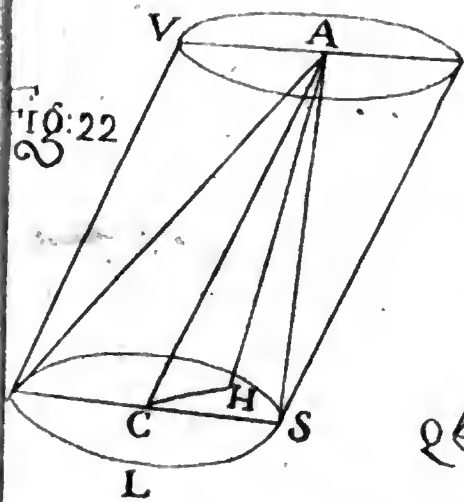

L
I
Fig: 24
Q
R
O
F
A
E


A
R
E
F

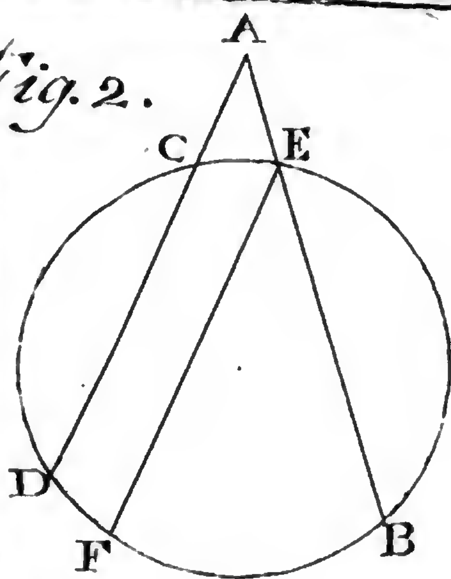
181

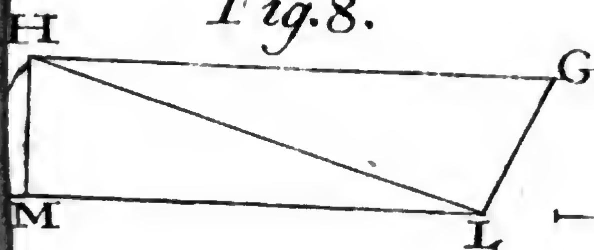

Fig: 6
A
C
H
L
O
F
Q
V
Z
M


Fig:13
C
M
G
N
P
V
O
A
Fig:14
C
D
I
K
S
F


Fig:22
V
A
C
H
S
L


G
Q
K
P





E

